

УДК:517.9, 574.34

## Использование эффекта кластеризации в системах связанных отображений для описания динамики метапопуляций

©2015 Кулаков М.П.<sup>а1</sup>, Фрисман Е.Я.<sup>а2</sup>

<sup>а</sup>Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Россия, 679016, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4

**Аннотация.** Проведено исследование феноменов кластеризации и мультистабильности, возникающих в системах связанных логистических отображений Рикера. Продемонстрирована возможность аппроксимации динамики кластеров системой меньшей размерности. Показано, что процесс формирования и трансформация кластеров аналогичен рождению и трансформации несинхронных режимов в аппроксимирующих системах.

**Ключевые слова:** метапопуляция, динамика, синхронизация, система связанных отображений, кластеризация, бассейн притяжения.

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих теоретических исследованиях в качестве удобных математических моделей динамики распределенных популяций животных — или метапопуляций — часто используются системы или решетки связанных отображений. При этом непрерывный плоский ареал метапопуляции представляется системой примыкающих друг к другу субареалов, заселенных локальными популяциями (субпопуляциями), которые связаны между собой миграционными переходами [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Динамика каждой локальной популяции может быть описана одномерным рекуррентным уравнением, а миграционная связь представлена аддитивными членами к каждому уравнению. В этом случае мгновенное значение численности каждой одиночной популяции определяется динамикой всех субпопуляций, с которыми она непосредственно связана. Ясно, что динамика метапопуляций будет намного более сложная, чем у одиночной локальной популяции или биологического сообщества.

Системы связанных отображений, как объекты длительных исследований нелинейной динамики, обладают богатой феноменологией. Для них отмечена мультистабильность динамических режимов [6, 7, 9, 10, 11] и связанное с ней явление кластеризации [2, 12, 13, 14, 15], которое, применительно к модельному объекту — метапопуляции, заключается в образовании групп “мелких” популяций (точечных популяций) с синхронной динамикой. Поведение каждой такой группы оказывается внешне неотличимо от динамического поведения “большой” однородной популяции (кластера).

Ниже приводятся результаты детального исследования данного феномена на примере системы связанных идентичных логистических отображений Рикера.

---

<sup>1</sup>k\_matvey@mail.ru

<sup>2</sup>frisman@mail.ru

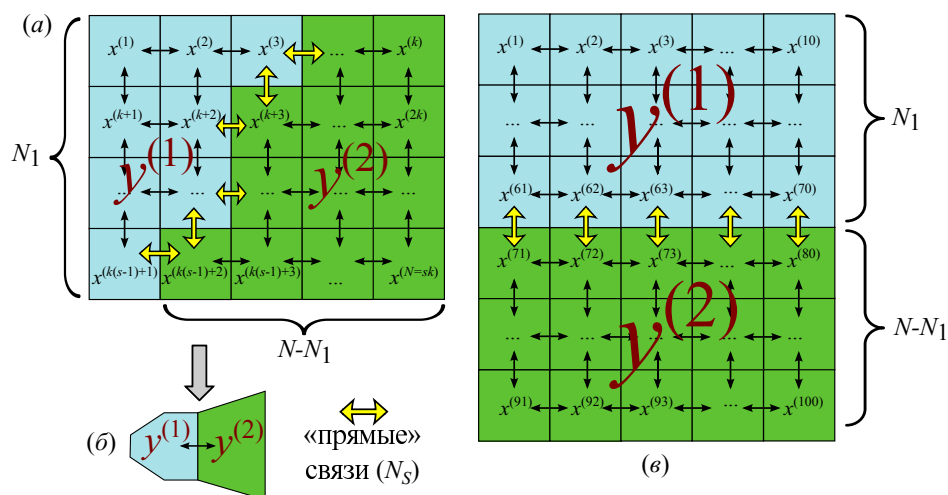
Делается попытка аппроксимировать динамику этой модели системой неидентичных, несимметрично связанных отображений, состоящих из меньшего числа переменных, равного числу образованных кластеров. Разрабатываются подходы для использования феномена кластеризации к описанию динамики реальных метапопуляций.

### СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ

В самом простейшем случае прямоугольный плоский ареал метапопуляции можно представить системой примыкающих друг к другу субареалов, в каждом из которых проживает локальная популяция одного вида (или субпопуляция), связанная с другими такими же субпопуляциями миграционными переходами. На рис. 1,а показан пример ареала такой модельной метапопуляции, где каждый квадрат — это  $i$ -ый субареал с плотностью особей, равной в  $n$ -й сезон размножения  $x_n^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Предположим, что рост субпопуляции имеет плотностно-зависимое регулирование, тогда для описания динамики  $i$ -й субпопуляции при отсутствии миграции можно воспользоваться логистическим уравнением вида:  $x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)})$ . Например, зависимостью запас-пополнение Рикера:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) = ax_n^{(i)} \exp(-x_n^{(i)}), \tag{1}$$

где  $a$  — репродуктивный потенциал, который является бифуркационным параметром,  $n$  — сезон размножения или дискретное время.



**Рис. 1.** Системы связанных идентичных популяций на ареале прямоугольной формы, а), в) образование двух кластеров, указанного размера ( $N_1$  и  $N - N_1$ ). Тонкие стрелки — миграция между отдельными субпопуляциями, толстые — между целыми кластерами. Пояснения к рис. 1,б идут по тексту.

В местах контакта субареалов происходят миграционный дрейф особей, отмеченный на рис. 1,а стрелками. Число эмигрантов из  $j$ -й субпопуляции считается прямо пропорциональным плотности особей в ней, а коэффициент пропорциональности  $m_{i,j}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ), равный доли особей эмигрирующих из  $j$ -й субпопуляции в  $i$ -ю, прямо зависит от длин границ с соседними субпопуляциями.

При диссипативном характере связи между локальными популяциями, т.е. расселении особей один раз в сезон (непосредственно после воспроизводства), динамика такой распределенной популяции или метапопуляции может быть описана системой глобально связанных отображений следующего вида:

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^N m_{i,j} f_j(x_n^{(j)}), (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Несложно заметить, что динамика каждой субпопуляции складывается из динамик всех остальных, с кем она непосредственно связана. В системе (2) выделяется коэффициент  $m_{i,i} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_{j,i}$ , равный доли особей оставшихся в  $i$ -й субпопуляции после эмиграции. Этот коэффициент определяет вклад локальной динамики, описываемым одиночным уравнением (1), в динамику  $i$ -го элемента после его взаимодействия со всеми остальными.

В случае, показанном на рис. 1,а, все субареалы равны, поэтому все функции  $f_j$  в (2) естественно считать одинаковыми. Равными оказываются и границы, между смежными субпопуляциями, а, следовательно, все коэффициенты миграции через границы оказываются одинаковыми — обозначим значения этих коэффициентов через  $m$ .

Если субпопуляции не имеют общих границ, то коэффициент миграций между ними естественно полагать равным нулю. Величины  $m_{i,j}$  зависят от месторасположения  $i$ -ой субпопуляции на ареале (точнее, от числа связанных с ней других субпопуляций) и равны  $1 - 2m$  для угловых,  $1 - 3m$  для пограничных и  $1 - 4m$  для внутренних субпопуляций, соответственно.

В моделях вида (2), помимо явного усложнения динамических режимов, появления предельных структур типа инвариантных кривых или странных аттракторов, отмечен ряд интересных феноменов. В частности возникает проблема глобальной устойчивости, мультистабильности динамических режимов, синхронизации динамики и кластеризации [7, 11, 12, 15]. В целом данные явления выражаются в том, что при одних и тех же значениях популяционных параметров и в зависимости от начальной численности возможно возникновение принципиально разных динамических режимов, отличающиеся периодами колебаний и степенью синхронизации. Наиболее распространено явление фазовой мультистабильности, когда одновременно существует несколько колебательных режимов, отличающиеся лишь фазой колебаний, формирование которых сложно зависит от начальных численностей.

Вместе с тем, явное использование систем связанных отображений для описания динамики реальных природных популяций затруднительно, что связано с необходимостью использовать большее число параметров (по числу уравнений и количеству прямых миграционных связей). Ранее в работе [16] предпринимались попытки использования таких моделей для описания динамики численности некоторых видов копытных, при этом для описания динамики четырех связанных популяций потребовалось 4 демографических параметров, 4 характеризующих емкость среды и 12 коэффициентов миграции.

Несмотря на все трудности, возникающие при использовании систем связанных отображений, они демонстрируют интересное явление — кластеризация, которое заключается в том, что ходе своей эволюции в системе (2) образуются группы рядом стоящих переменных с синхронной или синфазной динамикой [5, 12, 14]. Данное явление в системе (2) очень похоже на формирование в системах миграционно-связанных популяций (метапопуляциях) устойчивых ядерных группировок особей, окруженных флуктуирующими спутниковыми популяциями [3, 17]. Выделение таких групп особей (будем их так же называть кластерами) на фоне всей популяции возможно именно благодаря синхронному поведению внутри нее, когда

эта группа воспринимается как целая популяция, а не группа отдельных связанных популяций.

Вообще говоря, формирование подобных групп или кластеров в модели вида (2) однозначно, хотя и достаточно не тривиально, определяется начальным распределением особей по ареалу. Изначально неравные плотности каждой субпопуляции не всегда приводят к формированию несинхронной динамики всех локальных популяций, а равные начальные плотности не гарантируют когерентной (полностью синхронной) динамики всех субпопуляций [15], особенно при различных видах связи (диссипативная или инерциальная) и их комбинациях [7]. Однако, в случае, когда кластеры уже сформированы, анализ закономерностей асимптотической динамики метапопуляции может быть существенно облегчен и сведен к исследованию динамического поведения кластеров.

### АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИКИ ДВУХ КЛАСТЕРОВ

Пусть некоторые начальные значения переменных  $x_0^{(i)}$  системы (2) сформировали два кластера вида:  $\{x_n^{(i_1)}, x_n^{(i_2)}, \dots, x_n^{(i_{N_1})}\}$  и  $\{x_n^{(j_1)}, x_n^{(j_2)}, \dots, x_n^{(j_{N_2})}\}$ , где  $i$  и  $j$  – матрицы с номерами элементов кластеров ( $N_1 + N_2 = N$ ). Элементы каждого кластера попарно синхронны между собой. Будем описывать свойства этих кластеров числом элементов их образующих ( $N_1$  и  $N_2 = N - N_1$ ) и количеством прямых связей между ними ( $N_S$ ), т.е. прямых миграционных переходов между субпопуляциями на границе кластеров. Эти характеристики проиллюстрированы на рис. 1,а, где количество толстых линий равно  $N_S$ . Тогда в асимптотическом случае ( $n \rightarrow \infty$ ) динамику двух этих кластеров можно аппроксимировать системой двух неидентичных несимметрично связанных отображений вида:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_1}m\right) f_1(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N - N_1}m f_2(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N - N_1}m\right) f_2(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N_1}m f_1(y_n^{(1)}) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $y^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_1} x^{(i_k)}$  и  $y^{(2)} = \sum_{k=1}^{N-N_1} x^{(j_k)}$  – сумма численностей первого и второго кластера,

$$f_1(y_n^{(1)}) = ay_n^{(1)} \exp\left(-\frac{1}{N_1}y_n^{(1)}\right) \text{ и } f_2(y_n^{(2)}) = ax_n^{(2)} \exp\left(-\frac{1}{N - N_1}y_n^{(2)}\right).$$

Система (3) явно вытекает из предположений, что значения всех фазовых переменных (численностей субпопуляций), входящих в кластер, равны (или их динамика полностью синхронна), а сумма таких элементов равна новым переменным  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$ . Дробь в показателе степени функций  $f_1$  и  $f_2$  легко интерпретируется, поскольку экологическая ниша кластера прямо зависит от его размера, т.е. от числа локальных точечных популяций, образующих кластер ( $N_1$  и  $N - N_1$ ). На рис. 1,б различие ниши проиллюстрированы шестиугольником и четырехугольником, имеющие общую грань – граница между неравными кластерами.

Таким образом, динамика системы симметрично связанных изначально идентичных осцилляторов (2), в которой образуются кластеры с полностью синхронными элементами, может быть приближенна системой неидентичных несимметрично связанных элементов (3), которую будем называть аппроксимирующей для системы (2).

Чтобы легче было соотносить динамику переменных системы (3) с переменными системы (2) логично произвести нормировку переменных:  $y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{N_1}y^{(1)}$  и

$y^{(2)} \rightarrow \frac{1}{N - N_1} y^{(2)}$ . В результате система (3) значительно упрощается:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_1} m\right) f(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N_1} m f(y_n^{(2)}) \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N - N_1} m\right) f(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N - N_1} m f(y_n^{(1)}) \end{cases}, \quad (4)$$

и аппроксимирует средние значения численностей каждого кластера. Функции локального воспроизводства в этом случае становятся одинаковыми.

Однако, не смотря на возможность такой аппроксимации, в системах вида (2) к таким явлениям как мультистабильность, синхронизация и кластеризация добавляются “граничный эффект”, который делает невозможным полную синхронизацию, особенно при больших значениях коэффициента миграции. Данное явление легко представить, если сравнить субпопуляции, расположенные на границах между кластерами и где-нибудь в центре кластеров (см. рис. 1). Если последние связаны лишь представителями своего кластера, с которыми они синфазны, то популяции на границе связаны с популяциями из другого кластера, с которыми они уже несинфазны. В результате субпопуляции, принадлежащие одному кластеру, но расположенные на границе между кластерами и в центре кластера имеют различные амплитуды колебания (рис. 2 и 3).

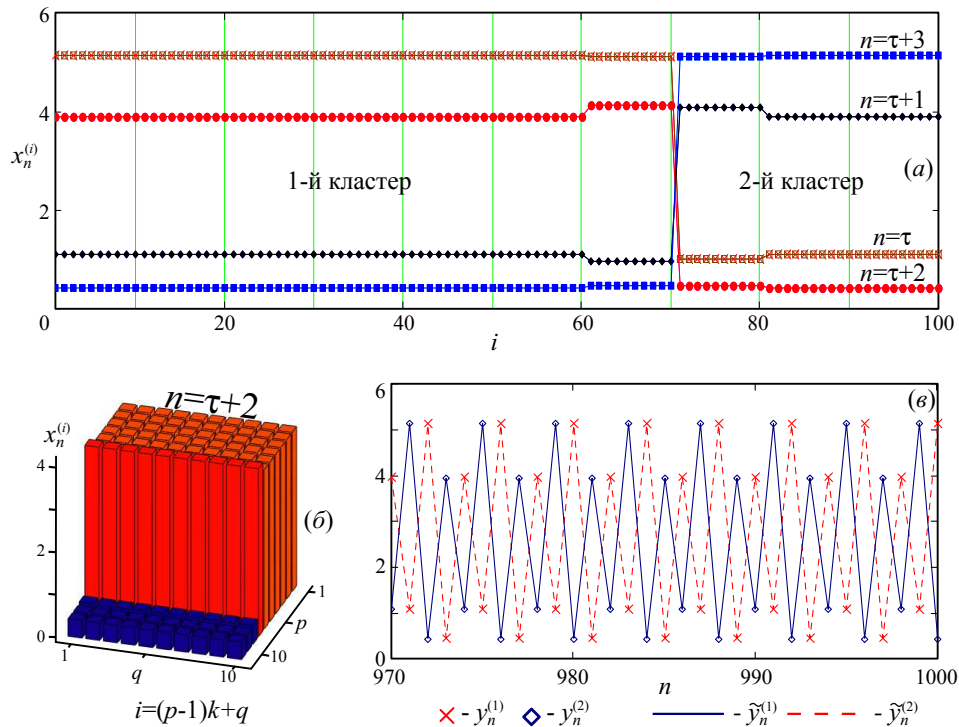
Граничный эффект продемонстрирован на графике (рис. 2,а), где по абсциссе отложен номер субпопуляции  $i = (p - 1)k + q$ , а  $p$  и  $q$  – номера строки и столбца прямоугольной решетки, на пересечении которых расположена  $i$ -я субпопуляция ( $p = 1, 2, \dots, s$ ,  $q = 1, 2, \dots, k$ ), а по оси ординат значения численности  $x_n^{(i)}$  каждой из них. В результате для фиксированного номера сезона  $n$  получена кривая, представляющая собой построчную развертку распределений численностей метапопуляции на прямоугольном ареале (10 строк с 10 субареалами в каждой). Каждая строка выделена тонкой линией. Для того, чтобы показать, что при указанных на графике значениях параметров в кластерах устанавливаются асимптотически устойчивые колебания с периодом равным 4, на рис. 2,а нанесено несколько десятков таких кривых, часть из которых сливается, и в результате достигнутой устойчивой динамики на рисунке видно лишь четыре из них ( $n = \tau$ ,  $n = \tau + 1$ ,  $n = \tau + 2$  и  $n = \tau + 3$ , где  $\tau$  – любое достаточно большое натуральное число). Пересечение этих кривых указывает на смену фаз колебаний у двух сформированных в данном случае кластеров (с характеристиками  $N = 100$ ,  $N_1 = 60$ ,  $N_S = 10$ ), которые изображены на рис. 2,б в плоскости  $(k, s)$  на  $n = \tau + 2$ -ой итерации. Высота каждого столбца указывает на достигаемое значение численности  $x_n^{(i)}$ . В данном случае форма кластеров выбрана так, что бы граница между двумя кластерами проходит между целыми строками из субпопуляций ( $i = 61, 62, \dots, 70$  и  $i = 71, 72, \dots, 80$ ), а из-за “граничного эффекта” амплитуда колебаний численностей субпопуляций, расположенных на границе между кластерами, отличается от амплитуды колебаний субпопуляций в центре кластеров.

Не смотря на отсутствие полной синхронизации, динамика 100 связанных популяций, демонстрирующая двухкластерную фазу кластеризации, неплохо описывается системой (3) или (4). На рис. 2,в показана динамика системы (4)

и динамика средних значений численностей каждого кластера  $\tilde{y}_n^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} x_n^{(ik)}$ ,

$\tilde{y}_n^{(2)} = \frac{1}{N - N_1} \sum_{k=1}^{N - N_1} x_n^{(jk)}$ , где значения  $x_n^{(ik)}$  и  $x_n^{(jk)}$  вычисляются из системы (2).

$$a=14, m=0.01$$



**Рис. 2.** Демонстрация “граничного эффекта” у двухкластерной фазы кластеризации, представленной *a*) в развертки по строкам и *б*) в пространственном расположении субпопуляций, где хорошо заметна неполная синхронизация; *в*) сопоставление динамики системы (4) и средней плотности двух кластеров системы (2).

В этом случае максимальная ошибка отклонения сумм  $\tilde{y}_n^{(j)}$  от их аппроксимации переменными  $y_n^{(j)}$  системы (4) при  $N_1 = 60$ ,  $N_S = 10$ , выраженная в процентах, т.е.  $100\% \cdot \max_n \left( \left| \tilde{y}_n^{(j)} - y_n^{(j)} \right| / \tilde{y}_n^{(j)} \right)$ , составляет 0.48% и 0.35%, для первой ( $j = 1$ ) и второй ( $j = 2$ ) переменной соответственно. Рост параметра связи  $m$  приводит к достаточно сильному росту данной ошибки и тому, что колебания аппроксимирующих  $y_n^{(1)}$ ,  $y_n^{(2)}$  и средних численностей  $\tilde{y}_n^{(1)}$ ,  $\tilde{y}_n^{(1)}$  становятся менее синхронными (сохраняется лишь фаза). И продолжается это до тех пор, пока описанное двухкластерное распределение субпопуляций вообще может существовать при выбранном начальном распределении. Затем происходит срыв синхронизации, и субпопуляции начинают колебаться в иных фазах, а система (4) не способна больше аппроксимировать новые кластеры. Однако для новой конфигурации кластеров всегда можно построить новую аппроксимирующую систему, быть может, кроме случая турбулентной фазы, когда каждая субпопуляция колеблется со своей уникальной фазой, а период колебания не меньше размерности модели ( $N$ ).

## БИФУРКАЦИИ ДВУХКЛАСТЕРНОЙ ФАЗЫ

Как уже говорилось, системы связанных отображений вида (2) характеризуется мультистабильным характером своей динамики. Это означает, что после потери устойчивости и формирования периодической динамики, система (2) может иметь принципиально разные траектории, которые возможны одновременно и реализуются в зависимости от начальных численностей в каждом субареале. Каждая такая траектория соответствует своей конфигурации кластеров: от полностью синхронной



динамики всех фазовых переменных системы (2) (когерентная фаза), до случая, когда формируются несколько кластеров, сопоставимых или нет по размеру (упорядоченная или частично упорядоченная фаза), или состояния, когда динамика каждой переменной оказывается не синфазна ни одной переменной, с которой она непосредственно связана (турбулентная фаза). Поэтому исследование механизмов формирования кластеров часто [5, 15] сводится к исследованию таких траекторий на устойчивость, включающее построение бассейнов притяжения и областей их существования в параметрическом пространстве, а так же изучение механизмов их формирования и трансформации.

Рассмотрим эволюцию системы отображения (2) из начальной точки вида:

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ X_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(N_1)}, Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_0^{(N_1+1)} = x_0^{(N_1+2)} = \dots = x_0^{(N)} \mid X_0 \neq Y_0 \right\}. \quad (5)$$

После  $\tau > 0$  итераций образ точки (5) будет иметь вид  $\mathbf{x}_\tau = \{x_\tau^{(1)}, x_\tau^{(2)}, \dots, x_\tau^{(N)}\}$ . Часть переменных  $\mathbf{x}_\tau$  может образовать кластеры вида:

$$\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N_1)}\} \text{ и } \{x_n^{(N_1+1)}, x_n^{(N_1+2)}, \dots, x_n^{(N)}\}, \quad (6)$$

элементы которых повторяют изначально заложенный в точке  $\mathbf{x}_0$  порядок синфазных элементов, и тогда можно говорить, что точка  $\mathbf{x}_0$  выбрана удачно и принадлежит бассейну притяжения данного кластера вида (6). В противном случае будут получены другие кластеры другого размера и числа заполнения. Для того, чтобы оценить “качество” или устойчивость выбранной начальной точки, т.е. приводит ли она кластерам вида (6), достаточно оценить близость начального  $\mathbf{x}_0$  и предельного пространственного распределения  $\mathbf{x}_\tau$  при вариациях значений  $X_0$  и  $Y_0$ .

В качестве оценки близости удобно воспользоваться коэффициентами детерминации:

$$r_n^2 = r^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n), \quad (n = \tau, \tau + 1, \dots, \tau + d), \quad (7)$$

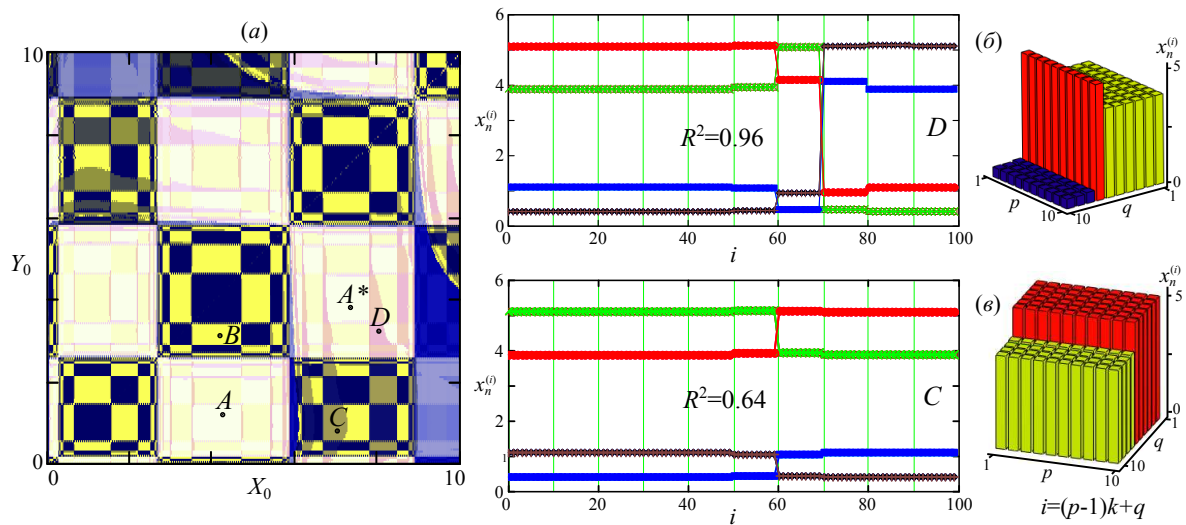
где  $\mathbf{x}_0$  соответствует набору фазовых переменных в начальный момент времени, например вида (6), а  $\mathbf{x}_n$  соответствует наборам после  $\tau, \tau + 1, \dots, \tau + d$  итераций, взятым на устойчивом аттракторе, где  $d$  – максимальная длина цикла, достигаемая какой либо из фазовых переменных. В результате вычисления величины (7) будет получено  $d$  оценок близости  $r_n^2$ , из которых выбирается самый минимальный:

$$R^2 = \min r_n^2. \quad (8)$$

В случае, если полученный коэффициент  $R^2$  достаточно близок к 1, то при данных значениях параметров такой режим существует, а значит, данная начальная точка принадлежит бассейну притяжения всех подобных кластеров. Если же он близок нулю, то между  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_n$  нет сходства, и для данных значений параметров данной фазы кластеризации не существует, либо выбранная начальная точка (5) не принадлежит бассейну таких кластеров. Просканировав фазовую плоскость  $(X_0, Y_0)$ , вычислив для каждой ее точки величину  $R^2(X_0, Y_0)$  и определив длины циклов  $d(X_0, Y_0)$ , можно построить бассейны притяжений выбранных в виде (6) двухкластерных режимов системы (2).

На рис. 3,а показан пример полученных таким образом бассейнов, которые соответствуют кластеру, рассмотренному в предыдущем пункте настоящей работы, т.е. при  $N = 100$  и  $N_1 = 70$ . Темные области соответствуют бассейнам когерентной

фазы, где  $R^2$  до девятого знака после запятой равен нулю, светлые — бассейн искомой фазы кластеризации, для которой  $R^2 > 0.99$ , цвета между ними — бассейны иных фаз кластеризации, для которых  $R^2$  много больше нуля, но меньше 0.99 (см. значения  $R^2$  на рис. 3,б и 3,в). Начальные условия из точки  $A$  приводят к кластеру, показанному на рис. 3,а из точки  $A^*$  к кластеру, все переменные которого сдвинуты относительно первого на одну итерацию. Начальные условия из точки  $B$  приводят к кластерам, при сдвиге переменных которого даже на две итерации не будет полного совпадения переменных, т.е.  $\min \left( \arg \min_T \left| \tilde{y}_n^{(1)} - \tilde{y}_{n+T}^{(2)} \right| \right) = 2$ , но  $\left| \tilde{y}_n^{(1)} - \tilde{y}_{n+2}^{(2)} \right| > 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ , и происходит это, по всей видимости, потому, что аттрактор этого режима расположен слишком близко к биссектрисе первого координатного угла фазовой плоскости. Режимы, формируемые из точек  $D$  и  $C$  (рис. 3,б и 3,в), примечательны тем, что такие начальные условия, даже выбранные в виде (5), приводят к кластерам, которые не принадлежат множествам (6), т.е. в этих областях данная фаза кластеризации оказывается неустойчивой.



**Рис. 3.** а) Бассейны притяжения некоторых фаз кластеризации, примеры б) двухкластерного и в) трехкластерного состояния, формируемые из начальной точки  $C$  и  $D$ , но не принадлежащих (6). Точки  $A$ ,  $A^*$  и  $B$  соответствуют фазе, показанной на рис. 2.

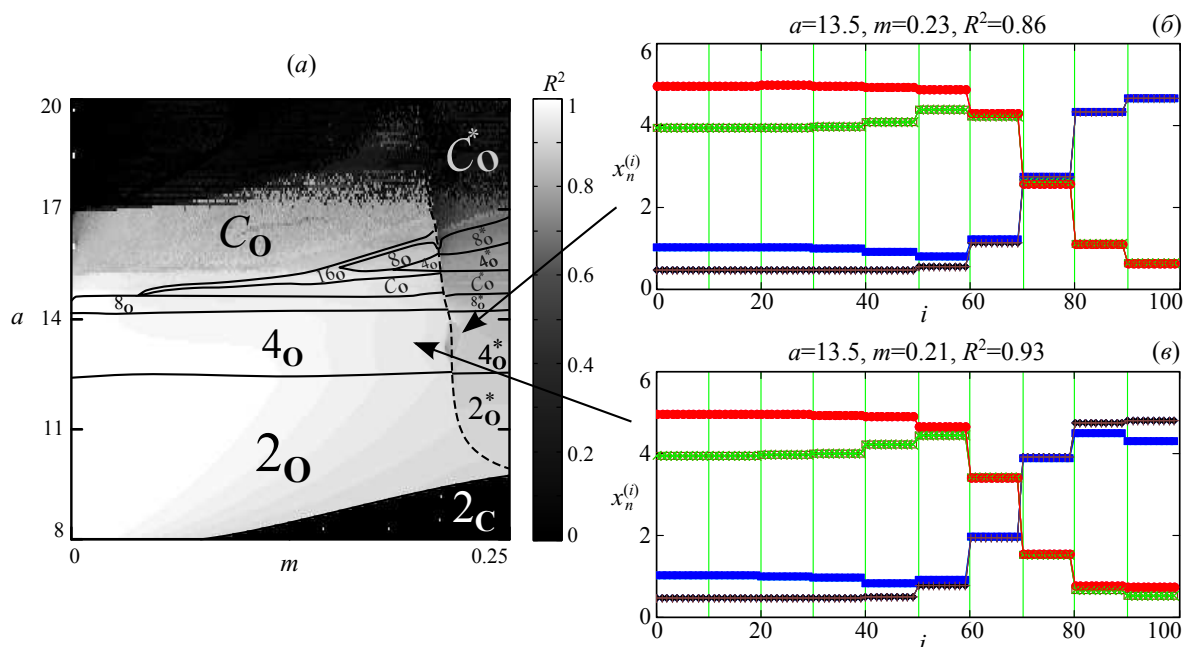
Применение величины (8) и описанная процедура построения бассейнов притяжения, с одной стороны, позволяют определить области притяжения, а с другой, значительно расширяют возможности классического исследования на устойчивость циклов разных длин. Например, используя показатель (8), но уже в зависимости от параметров системы (2) можно значительно дополнить классические карты динамических режимов, что дает дополнительную информацию о взаимосвязи различных фаз кластеризации.

На рис. 4,а поверх карты величины  $R^2$ , построенной в плоскости параметров системы (2), нанесены области существования устойчивых циклов конечной длины, которые получены при фиксировании начальной точки в виде (5), где  $X_0 = 1.5\bar{x}$  и  $Y_0 = 0.5\bar{x}$  ( $\bar{x} = \ln(a)$  — неподвижная точка системы (2) и одиночного уравнения (1)). Анализ разнообразных бассейнов притяжения показал, что данная точка почти всегда соответствует выбранному кластеру (точка  $A$  на рис. 3,а).

Справа от карты показаны примеры пространственно-временной динамики системы (2) при указанных значениях параметров и начальной точки соответствующей



рассматриваемой фазе кластеризации. Как можно заметить, выбранная произвольным образом начальная точка, не всегда приводит к выбранной фазе кластеризации. Однако такой выбор позволил выявить трехкластерную фазу, отмеченную звездочкой в виде верхнего индекса, которая примечательна тем, что часть осцилляторов на границе кластеров не испытывает колебаний ( $i = 71, 72, \dots, 80$  на рис. 4,б). Более того, удалось выделить нечеткую границу перехода от выбранной двухкластерной фазы к данной трехкластерной фазе. Происходит сближение значений фазовых переменных с 61 по 80 ( $i = 61, 62, \dots, 80$ ), а на самой линии значения примерно равны.

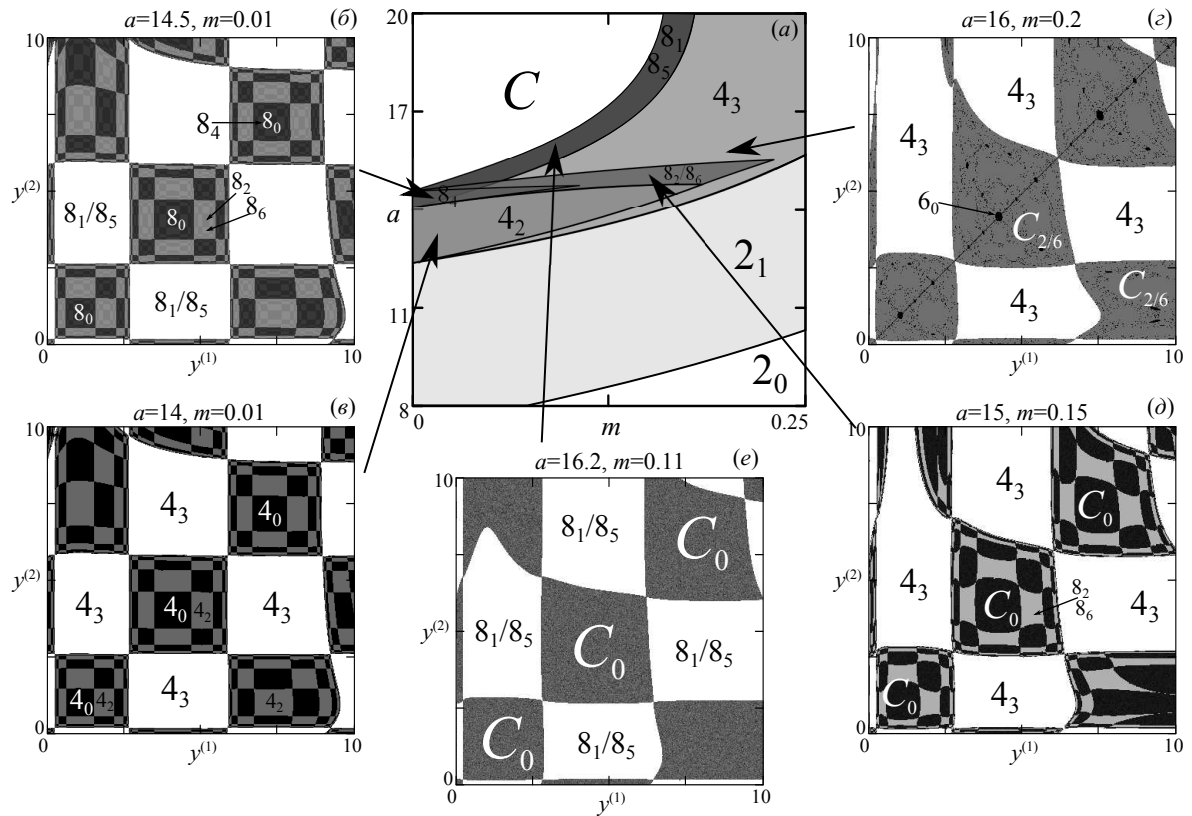


**Рис. 4.** а) Карта динамических режимов системы (2) и величина (8) при  $X_0 = 1.5 \ln(a)$  и  $Y_0 = 0.5 \ln(a)$ , где цифра – длина регистрируемого цикла, буква *C* – хаотическая динамика, нижний индекс **O** указывает на упорядоченную, а обозначение **C** на когерентную фазу. Примеры б) трехкластерной и в) двухкластерной фазы кластеризации, демонстрируют плавный переход одной фазы в другую.

Рассмотрим механизм потери устойчивости и формирования сложной динамики системы (4), которая аппроксимирует динамику двух кластеров, при  $N = 100$ ,  $N_1 = 70$  и  $N_S = 10$ .

При допустимых значениях параметров ( $a > 0$  и  $0 \leq m \leq 0.25$ ) система (4) имеет единственную неподвижную точку  $\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(2)} = \ln(a)$ . Первая бифуркация этой неподвижной точки сопровождается удвоением периода и рождением цикла с периодом 2, который, вследствие не идентичности уравнений системы (4), не всегда будет полностью синхронным. С ростом параметра  $a$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода синфазных режимов по сценарию Фейгенбаума. Однако в момент, когда второй мультипликатор выходит из единичного круга, неподвижная точка испытывает вторую бифуркацию (бифуркация вил или расщепления), которая сопровождается рождением неустойчивого противофазного цикла длины 2. Неподвижная точка при этом остается неустойчивой. В последствии рядом с каждым из элементов неустойчивого противофазного 2-цикла рождается пара седло-узловых точек и противофазный 2-цикл становится устойчивыми [3, 6]. Характер дальнейших бифуркаций подробно представлен на рис. 5,а.

Вследствие не идентичности уравнений (4) ее мультистабильные режимы



**Рис. 5.** *a)* Карта динамических режимов системы (4) и *б-е)* бассейны притяжения, показанных на карте циклов. Цифрами обозначены длина устойчивых циклов, нижний индекс – сдвиг фазы колебаний каждой переменной системы (4) относительно друг друга, буква *C* – нерегулярная, а *C*<sub>0</sub> – синфазная хаотическая динамика.

представлены сложной последовательностью циклов длины 2, 4, 8 и т.д. Нижний индекс у каждого из показанного на рис. 5 цикла – сдвиг фазы колебаний каждой переменной системы (4) относительно друг друга, при котором разности  $|y_n^{(1)} - y_{n+l}^{(2)}|$  минимальны, где  $l$  – сдвиг колебаний. Кроме того, при таком сдвиге амплитуды, как правило, не совпадают, т.е.  $|y_n^{(1)} - y_{n+l}^{(2)}| > 0$ . Различия становятся особенно заметны с ростом коэффициента миграции. Естественно, что удалось выявить лишь некоторые из таких режимов – это синхронный и несинхронный 2-циклы ( $2_0$  и  $2_1$ ), 4-циклы со сдвигом фазы 2 и 3 ( $4_2$  и  $4_3$ ), 8-циклы со сдвигом 1, 2, 4, 5 и 7 итераций ( $8_1, 8_2, 8_4, 8_5, 8_7$ ) и ряд других. Выяснилось, что каждый из перечисленных режимов, независимо от значений параметров, сохраняет каркас своей области притяжения, и все режимы после его бифуркации компактно располагаются в этой области. Например, в результате каскада удвоения периода  $2_1 \rightarrow 4_3 \rightarrow 8_1/8_5 \rightarrow$  и т.д., бассейн цикла  $4_3$  целиком лежит в области притяжения ставшего неустойчивыми цикла  $2_1$ , а бассейн режимов  $8_1$  и  $8_5$  в области притяжения цикла  $4_3$  (рис. 5, б-е). Области притяжения режимов  $4_2, 8_2, 8_4, 8_6$  также сохраняют свой каскад. Механизм их появления – также удвоения периода, кроме  $4_2$  и  $8_4$ . Эти два режима появляются в результате сложных нелокальных бифуркаций синхронного цикла в границах бассейна притяжения синхронных режимов  $4_0$  и  $8_0$ . Далее в результате удвоения периода режима  $4_2$  появляются два режима –  $8_2$  или  $8_6$ , которые делят между собой бассейн ставшего неустойчивого цикла  $4_2$ .

Каждая из приведенных последовательностей удвоения периода приводит в итоге к хаотической динамике. Например, каскад  $4_2 \rightarrow 8_2/8_6 \rightarrow$  и т.д. приводит к режиму

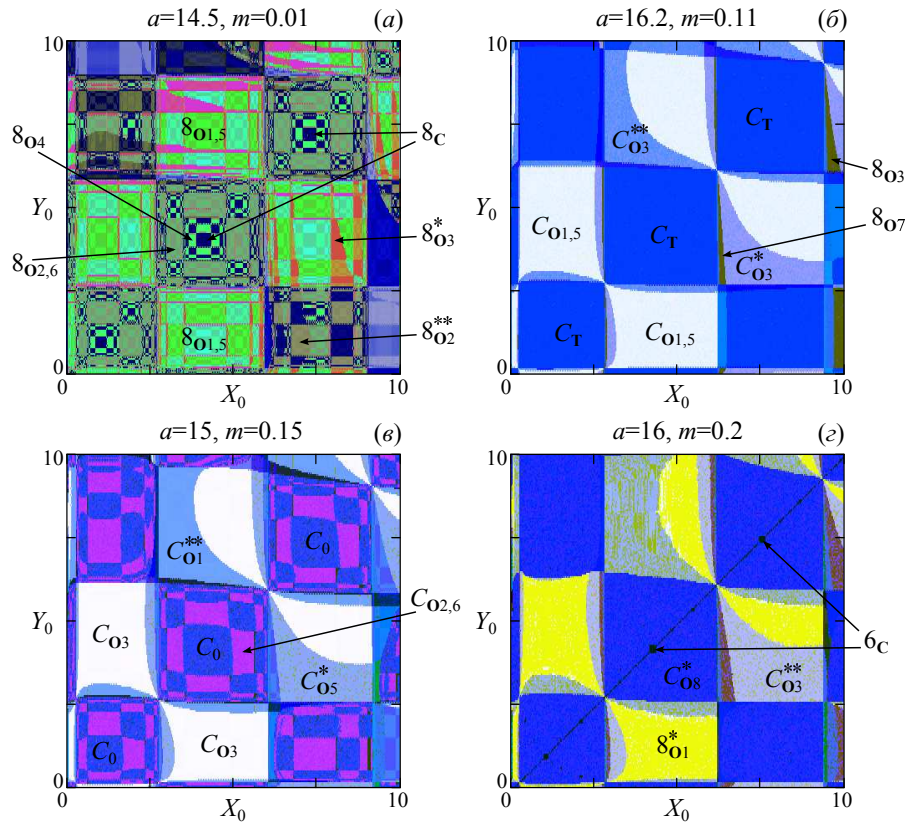
$C_{2/6}$ , бассейн которого показан на рис. 5,г. Аналогично последовательность удвоения  $2_1 \rightarrow 4_3 \rightarrow 8_1/8_5 \rightarrow$  и т.д. также приводит к несинхронной хаотической динамике, обозначенной на рис. 5,а буквой  $C$ . В результате в системе (4) одновременно могут сосуществовать несколько хаотических аттракторов, расположенных в разных частях фазовой плоскости, и несинхронные циклы разных длин. Поэтому для упрощения восприятия на рис. 5,а не все каскады удвоения продолжены в сторону формирования хаотической динамики, хотя их области притяжения отмечены на рис. 5,г-е.

Беглое сравнение бассейнов притяжения на рис. 3,а и 5,в показывает некоторое их подобие. Кроме этого, часть этих циклов (а именно,  $4_2$ ) точно описывает (аппроксимирует) режим, который формируется из точки  $B$  на рис. 3,а. Фактически, графики этих режимов показаны на рис. 2,в. Достаточно схожими оказались области притяжения для режима системы (2) с начальной точкой  $A$  или  $A^*$  и для режима  $4_3$  системы (4), которая также аппроксимирует такие кластеры. Как уже многократно отмечалось, начальная точка вида (5) в системе (2) не всегда приводит к кластерам с размерами 70 и 30 популяций (например, точка  $C$  и  $D$  на рис. 3,а). Динамика таких кластеров, очевидно, не может быть описана системой (4), поэтому области притяжения этих режимов, отмеченные на рис. 3,а, никак не могут появиться на бассейнах, показанных на рис. 5,б-е.

На рис. 6,а-г показаны некоторые другие области притяжения системы (2) при начальной точке вида (5) и варьировании  $X_0$  и  $Y_0$ . С одной стороны, эти бассейны демонстрируют, что при малом коэффициенте миграции и указанных начальных условиях система (2) обладает максимально возможным спектром мультистабильных режимов, которые отличаются размерами возникающих кластеров, регистрируемым периодом колебания и сдвигом фазы. С другой стороны, будучи наложенными на бассейны на рис. 5,б-д часть областей на рис. 6 совпадет достаточно точно.

На рис. 6 цифрой обозначена область притяжения, в которой реализуется аттрактор этого периода колебаний. Нижний индекс **O**, **C** или **T** обозначает упорядоченную, когерентную или турбулентную фазу кластеризации. Верхний индекс в виде звездочки (\*) или двух звездочек (\*\*) указан в случае, когда указанные начальные условия сформировали кластеры по размеру или расположению отличающиеся от кластеров с размерами 70 и 30 популяций. Число после **O** указывает на сдвиг колебаний каждой переменной одного кластера относительно любой другой переменной другого кластера, при котором разности  $|x_n^{(i)} - x_{n+l}^{(j)}|$  минимальны ( $i$  и  $j$  – номера двух любых элементов первого и второго кластера,  $l$  – сдвиг колебаний).

Можно отметить, что точно совпадают области, обозначенные на рис. 6,а как  $8_{O_{1,5}}$ ,  $8_{O_{2,6}}$ ,  $8_{O_4}$  и области, обозначенные на рис. 5,б, как  $8_1$ ,  $8_5$ ,  $8_2$ ,  $8_6$ ,  $8_4$ . Более или менее совпадают области притяжения ряда других режимов, с тем отличием, что системе (2) соответствует хаотическая динамика, а в аппроксимирующей системе (4) цикл конечной длины. Причем внешне этот хаотический аттрактор выглядит как цикл конечной длины, которому он “родственен” и в бассейне которого он расположен. Например, аттрактор режима  $C_{O_{1,5}}$  на фазовой плоскости  $(X_0, Y_0)$  представляет собой восемь очень плотных скоплений точек траектории системы (2), и, будучи совмещенные с аттрактором режима  $8_1$  или  $8_5$ , совпадут с ними. Это означает, что траектория  $8_1$  или  $8_5$  будет целиком лежать в этих скоплениях, а режим  $8_1$  или  $8_5$  системы (4) аппроксимирует хаотическую динамику двух кластеров  $C_{O_{1,5}}$  системы (2). Несложно также заметить, что при эволюции кластеров в системе (2) и колебательных режимов в системе (4) сохраняется сдвиг фазы кластеров или колебаний переменных  $y_n^{(1)}$  и  $y_n^{(2)}$ . Но такая закономерность нарушается, когда в системе (4) формируется хаотическая динамика на



**Рис. 6.** Бассейны притяжения некоторых аттракторов системы (2) при  $k = s = 10$ ,  $N = 100$  и начальном условии вида:  $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(70)} \neq Y_0 = x_0^{(71)} = x_0^{(72)} = \dots = x_0^{(100)}$ .

основе одного из мультистабильных режимов. Например, режим  $4_3$ , бассейн которого показан на рис. 5,з, хоть и имеет схожую с режимом  $8_{O1}^*$  область притяжения (рис. 6,з), но отличается периодом колебаний и поэтому не способен точно аппроксимировать динамику двух этих кластеров.

Помимо сходства устройств фазовых пространств систем (2) и (4), несложно заметить, что граница, отделяющая область упорядоченной фазы с двумя, выбранными в виде (5) кластерами (при  $N = 100$  и  $N_1 = 70$ ), от области когерентной фазы, полностью совпадает с границей существования несинхронных режимов в системе (4), которая аппроксимирует данные кластеры (см. рис. 4,а и рис. 5,а). Однако фиксированная начальная точка  $X_0 = 1.5 \ln(a)$  и  $Y_0 = 0.5 \ln(a)$  не позволяет оценить дальнейшее сходство сценариев усложнения динамики, т.к. эта точка принадлежит лишь одному из возможных мультистабильных состояний.

Таким образом, общность динамических свойств аппроксимирующих систем (3), (4) и кластеров изучаемой системе (2) позволяет предположить, что для описания динамики связанных популяций, имеющих не равные площади субареалов, вместо систем неидентичных отображений можно использовать системы полностью идентичных отображений, в которых образуются кластеры по “форме” напоминающие эти не равные субареалы. В этом случае следует выбрать соответствующий способ покрытия ареала решеткой системы (2) и задать начальное распределение, приводящее к формированию кластеров, суммарная численность в которых должна описать динамику каждой исходной субпопуляции. Естественно, в этом случае возникает проблемы единственности такого покрытия и однозначного сопоставления характеристик кластеров, их площадей, формы, количества связей с другими и

моделируемыми субареалами. В любом случае характер динамики будет определяться лишь двумя параметрами – скоростью роста и коэффициентом миграции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на примере двухкластерных состояний, возникающих в системах большого числа связанных отображений, показано, что кластеры могут быть агрегированы суммарным или средним значением переменных кластера и рассмотрены, как отдельные переменные. Эти величины будут также связаны, и в среднем описывать динамику цепочки кластеров. В случае полной или достаточно близкой к ней синхронизации эти агрегированные величины можно аппроксимировать системой намного меньшего числа переменных, чем исходной системы. Число новых переменных равно числу кластеров. Причем, если изначальная система связанных отображений состоит из полностью идентичных отображений, но формируются не равные кластеры, то аппроксимирующая система представляет собой систему неидентичных уравнений с неравными коэффициентами миграций.

Обнаружено качественное сходство механизмов, приводящих к формированию двух не равных кластеров в системе большой размерности и сценария появления несинхронных режимов в аппроксимирующей системе. Подобными оказались как бассейны притяжения, так и области устойчивости циклов.

Предлагается использовать такую аппроксимацию для значительного упрощения модельных уравнений динамики реальных метапопуляций. С одной стороны, можно традиционным путем строить уравнения динамики численности каждой субпопуляции и как-то учитывать существующие миграционные связи между субпопуляциями. В этом случае для каждого уравнения потребуется подбирать свой набор популяционных и миграционных параметров. С другой стороны, используя феномен кластеризации, можно подбирать решетку идентичных отображений, аппроксимация кластеров которой будет приводить к тем же или близким уравнениям динамики исходных субпопуляций. При таком подходе потребуется подбор лишь двух параметров, характеризующих динамику идентичных отображения и коэффициента миграций между ними, а также подбор начальных условий, приводящих к искомому аппроксимирующим кластерам.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-31443 мол\_a.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Udawadia F.E., Raju N. Dynamics of Coupled Nonlinear Maps and Its Application to Ecological Modeling. *Applied Mathematic and Computation*. 1997. V. 82. P. 137–179.
2. Kaneko K. Relevance of dynamic clustering to biological network. *Physica D*. 1994. V. 75. P. 55–73.
3. Opdam P. Metapopulation theory and habitat fragmentation: a review of holarctic breeding bird studies. *Landscape Ecology*. 1991. V. 5. No. 2. P. 93–106.
4. Wysham D.B., Hastings A. Sudden Shift Ecological Systems: Intermittency and Transients in the Coupled Riker Population Model. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2008. V. 70. P. 1013–1031.
5. Manica V., Silva J.A.L. Population distribution and synchronized dynamics in a metapopulation model in two geographic scales. *Mathematical Biosciences*. 2014. V. 250. P. 1–9.



6. Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас—пополнение в которых описывается функцией Рикера. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18. № 6. С. 25–41.
7. Кулаков М.П., Аксенович Т.И., Фрисман Е.Я. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: анализ синхронизации циклов. *Региональные проблемы*. 2013. Т. 16. № 1. С. 5–15.
8. Кулаков М.П. О возможности использования эффекта кластеризации в системах связанных отображений для описания динамики метапопуляций. *Региональные проблемы*. 2014. Т. 18. № 2. С. 28–34.
9. Oppo G.-L., Kapral R. Discrete models for the formation and evolution of spatial structure in dissipative systems. *Phys. Rev. A*. 1984. V. 33. No 6. P. 4219–4231.
10. Waller I., Kapral R. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. A*. 1986. V. 30. No 4. P. 2047–2055.
11. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие связанных систем Фейгенбаума. *Изв. Вузов: Радиофизика*. 1985. Т. 27. № 8. С. 991–1007.
12. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical, ordering, and control in network of chaotic elements. *Physica D*. 1990. V. 41. P. 137–172.
13. Popovych O., Pikovsky A., Maistrenko Yu. Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps. *Physica D*. 2002. V. 168–169. P. 106–125.
14. Иванова А.С., Кузнецов С.П. Волны кластеризации в цепочке систем, каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11. № 4–5. С. 80–88.
15. Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Бассейны притяжения кластеров в системах связанных отображений. *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11. № 1. С. 51–76.
16. Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л. Применение метапопуляционного подхода к анализу пространственно-временной динамики промысловых животных (на примере популяций кабана и изюбря). *Региональные проблемы*. 2011. Т. 14. № 2. С. 12–20.
17. *Ecology, Genetics and Evolution of Metapopulations*. Eds. Hanski Ilkka, Gaggiotti Oscar. London: Academic Press, 2004. 696 p.

Материал поступил в редакцию 16.06.2015, опубликован 22.06.2015.