

Прямое статистическое моделирование распространения эпидемии на основе стадия-зависимой стохастической модели

Логинов К.К.^{*}, Перцев Н.В.[†]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Приведена стохастическая стадия-зависимая модель распространения эпидемии в некотором регионе. Модель записана в форме непрерывно-дискретного случайного процесса, учитывающего прохождение индивидуумами различных стадий инфекционного заболевания. В рамках модели население региона представлено в виде когорт индивидуумов, структурированным по иммунологическим, клиническим, эпидемиологическим и демографическим критериям. Все когорты составляют два блока. Индивидуумы, входящие в когорты первого блока, считаются неразличимыми в рамках конкретной когорты и имеют однотипное параметрическое описание. Индивидуумы, входящие в когорты второго блока, различаются между собой по времени поступления в конкретную когорту и по времени пребывания в этой когорте. Разработан алгоритм статистического моделирования динамики когорт индивидуумов на основе метода Монте-Карло. Проведено численное исследование динамики когорт индивидуумов для наборов параметров, отражающих различные варианты передачи инфекции между индивидуумами.

Ключевые слова: *распространение эпидемии, стохастическая стадия-зависимая модель, непрерывно-дискретный случайный процесс, метод Монте-Карло, передача инфекции между индивидуумами, Ковид-19 инфекция.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследование эпидемических процессов представляет собой хорошо развитое направление в использовании метода математического моделирования для изучения живых систем. Примеры разнообразных математических моделей, возникающих в задачах эпидемиологии, приведены в работах [1]–[10] и содержащихся в них ссылках на работы других авторов. Пандемия Ковид-19 инфекции привела к активной разработке математических моделей, отражающих динамику численности инфицированных, больных и умерших от Ковид-19 индивидуумов. Для анализа реальных данных и прогнозирования динамики эпидемического процесса использованы дифференциальные уравнения, модели временных рядов и модели некоторых других типов, см., например, [11]–[23]. Многие модели в форме дифференциальных уравнений представлены в виде SIR или SEIR моделей для однородных популяций и предполагают мгновенные переходы индивидуумов из одной когорты в другую без учета реального времени пребывания индивидуумов в той или иной когорте. Модели в форме временных рядов опираются на стандартные методы математической статистики и посвящены прогнозированию динамики отдельных переменных на заданный период

^{*}kloginov85@mail.ru

[†]homlab@ya.ru

времени. Модели в форме временных рядов зачастую не используют биологические, эпидемиологические и медицинские аспекты распространения инфекции среди индивидуумов популяции. Индивидуум-ориентированные (агентные) модели еще не получили широкого распространения для исследования динамики Ковид-19 инфекции. Стохастические модели динамики Ковид-19 инфекции в форме марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями пока не представлены в текущих публикациях. Одним из важных результатов работ, посвященных обработке реальных данных по динамике Ковид-19 инфекции в различных странах, является оценка параметров процессов, связанных с формированием численности различных групп индивидуумов в начальный период развития эпидемии и прогнозированием появления так называемых второй, третьей и последующих волн эпидемии.

Целью настоящей статьи является разработка стадия-зависимой стохастической модели распространения эпидемии среди населения некоторого региона с учетом неоднородности населения по ряду признаков. В рамках модели население региона представлено в виде когорт индивидуумов, структурированным по иммунологическим, клиническим, эпидемиологическим и демографическим критериям. Кроме того, модель учитывает миграционные притоки восприимчивых, латентно-инфицированных и больных индивидуумов, прохождение индивидуумами нескольких стадий инфекционного заболевания и различную тяжесть заболевания. Продолжительности различных стадий инфекционного заболевания заданы в виде некоторых констант, что автоматически исключает применение марковских моделей.

В задачи работы входит исследование динамики численности населения региона в зависимости от вариантов передачи респираторной инфекции между индивидуумами в первые 3–4 месяца от начала развития эпидемического процесса в регионе. Предполагается, что инфекция вызвана распространением вирусов, с которыми население региона встречается впервые. Варианты передачи инфекции между индивидуумами отражают несколько способов параметрического описания индивидуумов супер-распространителей, т.е. тех индивидуумов, кто активно распространяет инфекцию вследствие особенностей своих иммунологических, эпидемиологических и демографических параметров. Модель не учитывает введение карантина, самоизоляцию индивидуумов, вакцинацию населения и возможное повторное заражение переболевших индивидуумов. Перечисленные факторы существенно влияют на развитие и затухание эпидемического процесса уже после того, как этот процесс затронул достаточно большое число индивидуумов. Исследование перечисленных факторов не входит в цели и задачи настоящей работы.

Модель записана в форме непрерывно-дискретного случайного процесса, учитывающего прохождение индивидуумами нескольких стадий инфекционного заболевания. Принято, что население региона представлено в виде когорт индивидуумов, которые составляют два блока. Индивидуумы, входящие в когорты первого блока, считаются неразличимыми в рамках конкретной когорты и имеют однотипное параметрическое описание, специфическое для каждой из когорт этого блока. Индивидуумы, входящие в каждую из когорт второго блока, также имеют однотипное параметрическое описание, но и различаются между собой по времени поступления в конкретную когорту и по времени пребывания в этой когорте. Использование двух блоков когорт приводит к разработке модели на основе совмещения популяционного и индивидуум-ориентированного (агентного) подходов. Непрерывно-дискретный случайный процесс, возникающий при разработке модели, содержит: а) целочисленные случайные переменные, задающие численности индивидуумов когорт каждого из двух блоков, б) специальные множества — семейства уникальных типов индивидуумов,

отражающих моменты поступления индивидуумов в когорты второго блока и продолжительности пребывания индивидуумов в этих когортах. Для каждого текущего момента времени семейства уникальных типов индивидуумов в явной форме учитывают предысторию формирования когорт второго блока и задают поток событий, связанных с завершением пребывания индивидуумов в когортах этого блока. Включение в модель переменных в виде семейств уникальных типов индивидуумов позволяет «обойти» проблемы, связанные с немарковостью случайного процесса, учитывающего только численности когорт индивидуумов. По своей формализации, используемому математическому и вычислительному аппарату представленная ниже модель существенно отличается от моделей, перечисленных в обзоре. Для построения модели использован подход, предложенный в работах [24]–[28]. Приведенная ниже модель является развитием и обобщением модели [28] с точки зрения набора переменных, отражающих неоднородность популяции, учета переходов индивидуумов между когортами, вызванных процессами инфицирования и развития заболевания различной тяжести, миграционного притока восприимчивых, латентно-инфицированных и больных индивидуумов.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе сформулированы предположения и приведена блок-схема модели. Второй раздел посвящен детальному математическому описанию модели в терминах непрерывно-дискретного случайного процесса. В третьем разделе представлен алгоритм моделирования, основанный на соотношениях, описывающих правила изменения переменных модели, и способах моделирования случайных величин с помощью стандартных алгоритмов метода Монте-Карло. Четвертый раздел содержит результаты вычислительных экспериментов с моделью по исследованию динамики численности когорт для наборов параметров, отражающих различные варианты передачи инфекции между индивидуумами. Обсуждение полученных результатов приведено в заключительном разделе.

1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И БЛОК-СХЕМА МОДЕЛИ

1.1 Описание когорт индивидуумов

Примем, что инфекция распространяется среди населения некоторого региона, представленного в терминах нескольких когорт индивидуумов. Каждый индивидуум той или иной когорты характеризуется набором индексов, которые отражают его описание с точки зрения эпидемиологических, иммунологических, клинических и демографических показателей. Обозначим:

$$J_3 = \{1, 2, 3\}, \quad J_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Для параметрического описания индивидуумов используем индексы:

- $k, \nu \in J_5$ — номер социально-демографической группы, к которой принадлежит индивидуум (например, индивидуумы в возрасте 11–17 лет, 17–25 лет, 25–40 лет, 40–65 лет, старше 65 лет);
- $n, m \in J_3$ — уровень контактности индивидуумов (низкий, средний, высокий);
- $\alpha, \beta, \gamma \in J_3$ — уровень иммунитета индивидуумов (низкий, средний, высокий);
- $\theta, \eta \in J_3$ — уровень заразности больных индивидуумов (низкий, средний, высокий);
- $\varphi, \psi \in J_3$ — форма тяжести заболевания больных индивидуумов (легкая или бессимптомная, средняя, тяжелая).

Примем, что каждый индивидуум региона находится в одной из следующих когорт:

- $S = \{S_{k,n,\alpha}\}$, где $S_{k,n,\alpha}$ — восприимчивый к инфекции индивидуум, принадлежащий социально-демографической группе с номером k , обладающий уровнем контактности n ,

уровнем иммунитета α ;

- $I = \{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}\}$, где $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ — невыявленный больной индивидуум, находящийся на самоизлечении в домашних условиях, принадлежащий социально-демографической группе с номером k , обладающий уровнем контактности n , уровнем иммунитета α , уровнем заразности θ , формой φ тяжести заболевания;

- $L = \{L_{k,n,\alpha,\theta}\}$, где $L_{k,n,\alpha,\theta}$ — латентно-инфицированный (не заразный) индивидуум, принадлежащий социально-демографической группе с номером k , обладающий уровнем контактности n , уровнем иммунитета α , который был инфицирован после контакта с невыявленным больным индивидуумом, имеющим уровень заразности θ ;

- $U = \{U_{k,n,\gamma}\}$, где $U_{k,n,\gamma}$ — переболевший индивидуум, представляющий собой самоизлечившегося невыявленного больного индивидуума, принадлежащего социально-демографической группе с номером k , обладающего уровнем контактности n , уровнем γ иммунитета к инфекции;

- $V = \{V_{k,n,\alpha,\varphi}\}$, где $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ — изолированный больной индивидуум, принадлежащий социально-демографической группе с номером k , обладающий уровнем контактности n , уровнем иммунитета α , имеющий форму φ тяжести заболевания, находящийся на амбулаторном лечении в домашних условиях или лечении в медицинском учреждении в зависимости от значений индексов k и φ ;

- $W = \{W_{k,n,\gamma}\}$, где $W_{k,n,\gamma}$ — переболевший индивидуум, вылеченный амбулаторно в домашних условиях или в медицинском учреждении, принадлежащий социально-демографической группе с номером k , обладающий уровнем контактности n , уровнем γ иммунитета к инфекции;

- D — все умершие от инфекции индивидуумы;

- Z — все индивидуумы, покинувшие рассматриваемый регион вследствие миграционных процессов или умершие от причин, не связанных с инфекцией;

- G — все индивидуумы, прибывающие в рассматриваемый регион и способные пополнять когорты S, L, I (внешний источник поступления индивидуумов).

1.2 Набор предположений модели

Распространение инфекции среди населения региона опишем с помощью набора предположений, отражающих события, происходящие с индивидуумами когорт S, I, U, V, W , а именно: приток индивидуумов из других регионов, гибель или эмиграция индивидуумов и переход индивидуумов из одной когорты в другую.

Для описания событий, происходящих с индивидуумом, используем следующую терминологию. Пусть некоторое событие A изучается, начиная с момента времени t_A . Будем говорить, что событие A происходит с интенсивностью $\lambda_A = const > 0$, если независимо от других событий вероятность наступления A в течение бесконечно малого промежутка времени $(t; t + h)$ равна $\lambda_A h + o(h)$, вероятность не наступления A за промежуток $(t; t + h)$ равна $1 - \lambda_A h + o(h)$ и вероятность наступления события A более одного раза за этот промежуток времени равна $o(h)$, $h \rightarrow +0$. Отсюда следует, что событие A происходит в момент времени $t_A + T_A$, где T_A — случайная величина, имеющая экспоненциальный закон распределения с параметром λ_A :

$$P\{T_A < T\} = 1 - e^{-\lambda_A T}, \quad T \geq 0.$$

Выражение $ET_A = 1/\lambda_A$ означает математическое ожидание случайной величины T_A и интерпретируется как среднее время до наступления события A , считая от момента времени t_A . Если же интенсивность $\lambda_A = 0$, то полагаем, что наступление события A невозможно при $t \geq t_A$.

Введем набор предположений, определяющих динамику эпидемического процесса. Полагаем, что каждое из событий, описанных в предположениях Н1–Н8, происходит независимо от других событий, включая предшествующие события, а индивидуумы каждой из когорт ведут себя независимо друг от друга. События, описанные в предположениях Н2, Н5, Н7, не зависят от времени пребывания индивидуумов в когортах $L_{k,n,\alpha,\theta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $V_{k,n,\alpha,\varphi}$. Пусть индексы $k, \nu, n, m, \alpha, \beta, \gamma, \theta, \eta, \varphi, \psi$ принимают значения, указанные в разделе 1.1. Предположения модели таковы.

Н1. Приток индивидуумов когорт $S_{k,n,\alpha}$, $L_{k,n,\alpha,\theta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ из внешнего источника G задается с помощью интенсивностей $r_{S,k,n,\alpha} \geq 0$, $r_{L,k,n,\alpha,\theta} \geq 0$, $r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi} \geq 0$:

$$G \xrightarrow{r_{S,k,n,\alpha}} G + S_{k,n,\alpha}, \quad G \xrightarrow{r_{L,k,n,\alpha,\theta}} G + L_{k,n,\alpha,\theta}, \quad G \xrightarrow{r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}} G + I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}.$$

Указанные интенсивности таковы, что $r_{S,k,n,\alpha} > 0$ при некоторых $k \in J_5$, $n, \alpha \in J_3$.

Н2. Индивидуумы когорт $S_{k,n,\alpha}$, $L_{k,n,\alpha,\theta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $U_{k,n,\gamma}$, $W_{k,n,\gamma}$ погибают вследствие причин, не связанных с инфекцией, или покидают регион с интенсивностью $\mu_k > 0$ в расчете на одного индивидуума:

$$S_{k,n,\alpha} \xrightarrow{\mu_k} Z, \quad L_{k,n,\alpha,\theta} \xrightarrow{\mu_k} Z, \quad I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi} \xrightarrow{\mu_k} Z, \\ U_{k,n,\gamma} \xrightarrow{\mu_k} Z, \quad W_{k,n,\gamma} \xrightarrow{\mu_k} Z.$$

Погибший или покинувший регион индивидуум конкретной когорты $L_{k,n,\alpha,\theta}$ или $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ исключается из нее с равной вероятностью среди всех индивидуумов этой когорты.

Н3. Индивидуумы когорт $S_{k,n,\alpha}$ подвержены инфицированию при контакте с индивидуумами когорт $I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}$ с интенсивностью $f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi} > 0$ в расчете на одну пару этих индивидуумов. После контакта индивидуум когорты $S_{k,n,\alpha}$ становится индивидуумом когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, а индивидуум когорты $I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}$ сохраняется неизменным:

$$S_{k,n,\alpha} + I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi} \xrightarrow{f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi}} L_{k,n,\alpha,\eta} + I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}.$$

Н4. Пусть индивидуум когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$ появился в момент времени t_L . Если за промежуток времени $(t_L; t_L + \omega_{L,\alpha,\eta})$, $\omega_{L,\alpha,\eta} > 0$, этот индивидуум не умер от причин, не связанных с инфекцией и не покинул регион, то в момент времени $t_L + \omega_{L,\alpha,\eta}$ с вероятностью $q_{\theta,\varphi}(k, \alpha, \eta)$ он становится индивидуумом когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$:

$$L_{k,n,\alpha,\eta}|_{t_L} \longrightarrow \{q_{\theta,\varphi}(k, \alpha, \eta), I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}, \theta, \varphi \in J_3\}|_{t_L + \omega_{L,\alpha,\eta}},$$

$$0 \leq q_{\theta,\varphi}(k, \alpha, \eta) \leq 1, \quad \sum_{\theta \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} q_{\theta,\varphi}(k, \alpha, \eta) = 1.$$

Н5. Индивидуумы когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ вследствие развития или выявления заболевания становятся индивидуумами когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ с интенсивностью $g_{k,\varphi} \geq 0$ в расчете на одного индивидуума:

$$I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi} \xrightarrow{g_{k,\varphi}} V_{k,n,\alpha,\varphi}.$$

Индивидуум, покинувший конкретную когорту $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, исключается из нее с равной вероятностью среди всех индивидуумов этой когорты.

Н6. Пусть индивидуум когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ появился в момент времени t_I . Если за промежуток времени $(t_I; t_I + \omega_{I,k,\varphi})$, $\omega_{I,k,\varphi} > 0$, этот индивидуум не умер от причин, не связанных с инфекцией, не покинул регион и не превратился в одного из индивидуумов

когорты V , то в момент времени $t_I + \omega_{I,k,\varphi}$ он становится индивидуумом когорты $U_{k,n,\gamma}$:

$$I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}|_{t_I} \longrightarrow U_{k,n,\gamma}|_{t_I+\omega_{I,k,\varphi}},$$

где индекс γ задается детерминированной зависимостью $\gamma = \gamma(\alpha, \varphi)$.

Н7. Индивидуумы когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ погибают вследствие причин, вызванных инфекцией, с интенсивностью $\rho_{k,\varphi} \geq 0$ в расчете на одного индивидуума:

$$V_{k,n,\alpha,\varphi} \xrightarrow{\rho_{k,\varphi}} D.$$

Индивидуум, покинувший конкретную когорту $V_{k,n,\alpha,\varphi}$, исключается из нее с равной возможностью среди всех индивидуумов этой когорты.

Н8. Пусть индивидуум когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ появился в момент времени t_V . Если за промежуток времени $(t_V; t_V + \omega_{V,k,\varphi})$, $\omega_{V,k,\varphi} > 0$, этот индивидуум не умер от причин, вызванных инфекцией, то в момент времени $t_V + \omega_{V,k,\varphi}$ он становится индивидуумом когорты $W_{k,n,\gamma}$:

$$V_{k,n,\alpha,\varphi}|_{t_V} \longrightarrow W_{k,n,\gamma}|_{t_V+\omega_{V,k,\varphi}},$$

где индекс γ задается детерминированной зависимостью $\gamma = \gamma(\alpha, \varphi)$.

Блок-схема, отражающая структуру населения региона и предположения модели, представлена на рисунке 1.

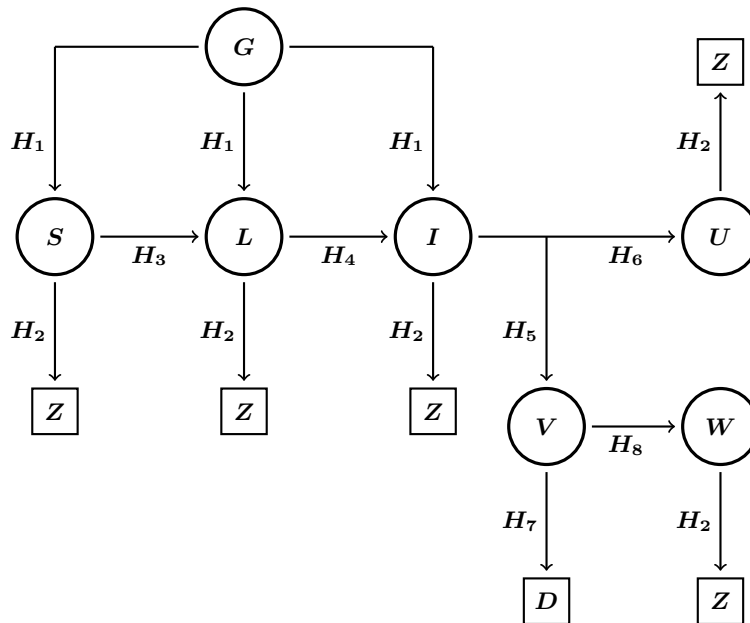


Рис. 1. Схематическое представление модели; обозначения когорт и предположения приведены в тексте.

1.3 Краткая интерпретация параметров модели и соотношения для некоторых из параметров

Пусть переменная t (текущее время) выражено в сутках. Параметры, приведенные в предположениях Н1–Н8, имеют следующую интерпретацию:

$r_{S,k,n,\alpha}$, $r_{L,k,n,\alpha,\theta}$, $r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ — интенсивности поступления индивидуумов из внешнего источника G в когорты $S = \{S_{k,n,\alpha}\}$, $L = \{L_{k,n,\alpha,\theta}\}$, $I = \{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}\}$, размерность «1/сутки», если $r_{S,k,n,\alpha} > 0$, $r_{L,k,n,\alpha,\theta} > 0$, $r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi} > 0$, то $1/r_{S,k,n,\alpha}$, $1/r_{L,k,n,\alpha,\theta}$,

$1/r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ — среднее время (в сутках) до поступления очередного индивидуума соответственно в когорту $S_{k,n,\alpha}$, $L_{k,n,\alpha,\theta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$;

μ_k — интенсивность перехода индивидуумов когорты $S_{k,n,\alpha}$, $L_{k,n,\alpha,\theta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $U_{k,n,\gamma}$, $W_{k,n,\gamma}$ в когорту Z вследствие гибели от причин, не связанных с инфекцией, или миграционного оттока, размерность «1/сутки», $1/\mu_k$ — среднее время (в сутках) до перехода указанных индивидуумов в когорту Z ;

$f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi}$ — интенсивность контактов одного индивидуума когорты $S_{k,n,\alpha}$ с одним индивидуумом когорты $I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}$, приводящих к появлению индивидуума когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, размерность «1/сутки», $1/f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi}$ — среднее время (в сутках) до наступления контакта пары указанных индивидуумов;

$\omega_{L,\alpha,\eta}$ — продолжительность инкубационного периода индивидуума когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, размерность «сутки»;

$q_{\theta,\varphi}(k, \alpha, \eta)$ — вероятность превращения индивидуума когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$ в индивидуума когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, безразмерная константа;

$g_{k,\varphi}$ — интенсивность превращения индивидуума когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ в индивидуума когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ вследствие развития или выявления заболевания, размерность «1/сутки», если $g_{k,\varphi} > 0$, то $1/g_{k,\varphi}$ — среднее время (в сутках) до превращения индивидуума когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ в индивидуума когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$;

$\omega_{I,k,\varphi}$ — продолжительность заболевания у индивидуума когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ до его выздоровления и превращения в индивидуума когорты $U_{k,n,\gamma}$, размерность «сутки»;

$\rho_{k,\varphi}$ — интенсивность гибели индивидуума когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ вследствие причин, вызванных инфекцией, размерность «1/сутки», если $\rho_{k,\varphi} > 0$, то $1/\rho_{k,\varphi}$ — среднее время (в сутках) до гибели индивидуума когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ вследствие причин, вызванных инфекцией;

$\omega_{V,k,\varphi}$ — продолжительность заболевания у индивидуума когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ до его выздоровления и превращения в индивидуума когорты $W_{k,n,\gamma}$, размерность «сутки»;

$\gamma = \gamma(\alpha, \varphi)$ — приобретенный уровень иммунитета у индивидуумов когорты $U_{k,n,\gamma}$, $W_{k,n,\gamma}$ в зависимости от их исходного уровня иммунитета α и тяжести перенесенного заболевания φ .

Исходя из предположений Н1–Н8, примем, что ряд параметров удовлетворяет набору условий, перечисленных ниже, а именно:

1) интенсивность $f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi}$ возрастает по каждому из индексов n , m , η при фиксированных значениях остальных индексов; $f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi}$ убывает по индексам α и ψ при фиксированных значениях остальных индексов;

2) при фиксированном k интенсивности $g_{k,\varphi}$, $\rho_{k,\varphi}$ таковы, что

$$g_{k,1} \leq g_{k,2} \leq g_{k,3}; \quad \rho_{k,1} \leq \rho_{k,2} \leq \rho_{k,3};$$

3) продолжительности инкубационного периода $\omega_{L,\alpha,\eta}$ — положительные константы, значения которых зависят от индексов α , η ;

4) для фиксированного k продолжительности заболевания $\omega_{I,k,\varphi}$, $\omega_{V,k,\varphi}$ — положительные константы, значения которых таковы, что

$$\omega_{I,k,1} \leq \omega_{I,k,2} \leq \omega_{I,k,3}; \quad \omega_{V,k,1} \leq \omega_{V,k,2} \leq \omega_{V,k,3}.$$

2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

2.1 Обозначения переменных модели

Пусть $[0; a_{mod}]$ — промежуток моделирования, где $a_{mod} > 0$ — некоторая константа.

Зафиксируем $k \in J_5$, $n, \alpha, \gamma, \theta, \eta, \varphi \in J_3$. Численности когорт индивидуумов

$$S_{k,n,\alpha}, L_{k,n,\alpha,\eta}, I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}, U_{k,n,\gamma}, V_{k,n,\alpha,\varphi}, W_{k,n,\gamma}$$

в момент времени $t \in [0; a_{mod}]$ обозначим через

$$S_{k,n,\alpha}(t), L_{k,n,\alpha,\eta}(t), I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t), U_{k,n,\gamma}(t), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t), W_{k,n,\gamma}(t). \quad (1)$$

Принимаем, что для каждого $t \in (0; a_{mod}]$ переменные (1) — неотрицательные целочисленные случайные величины, а при $t = 0$ переменные (1) таковы, что

$$S_{k,n,\alpha}(0) = S_{k,n,\alpha}^{(0)}, L_{k,n,\alpha,\eta}(0) = I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(0) = U_{k,n,\gamma}(0) = V_{k,n,\alpha,\varphi}(0) = W_{k,n,\gamma}(0) = 0, \quad (2)$$

где $S_{k,n,\alpha}^{(0)}$ — фиксированные неотрицательные целочисленные константы. Соотношения (2) задают численности когорт до начала процесса распространения инфекции среди населения региона.

Следуя предположениям Н1–Н8, рассматриваемые когорты индивидуумов представим в виде двух блоков.

К первому блоку отнесем когорты $S_{k,n,\alpha}, U_{k,n,\gamma}, W_{k,n,\gamma}$. Для фиксированных значений индексов k, n, α, γ индивидуумы каждой из когорт первого блока неразличимы между собой. Поэтому для описания динамики указанных когорт достаточно использовать переменные $S_{k,n,\alpha}(t), U_{k,n,\gamma}(t), W_{k,n,\gamma}(t)$.

Второй блок составляют когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}, I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}, V_{k,n,\alpha,\varphi}$. Для описания динамики этих когорт будем учитывать не только переменные $L_{k,n,\alpha,\eta}(t), I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t)$, но и различия индивидуумов между собой. Эти различия обусловлены моментами времени, когда индивидуумы поступают в ту или иную когорту, и моментами времени, когда пребывание индивидуумов в когортах окончательно завершается. Продолжительности времени до очередного поступления индивидуумов в ту или иную когорту и длительности их пребывания в когортах $L_{k,n,\alpha,\eta}, I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}, V_{k,n,\alpha,\varphi}$ описываются с помощью независимых в совокупности случайных величин с экспоненциальными распределениями и соответствующего набора констант. Вероятность совпадения уникальных типов любой пары, тройки и т.д. индивидуумов равна нулю.

Индивидуумов когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$ опишем с помощью их уникальных типов $t_L + \omega_{L,\alpha,\eta}$. Здесь $t_L \in [0; a_{mod}]$ — момент времени, в который появился некоторый индивидуум когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, $\omega_{L,\alpha,\eta}$ — допустимая длительность пребывания индивидуума в когорте, $t_L + \omega_{L,\alpha,\eta}$ — момент времени, в который этот индивидуум может превратиться в индивидуума когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$. Обозначим через $\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t)$ семейство уникальных типов индивидуумов когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, существующих в момент времени $t \in [0; a_{mod}]$. Определим это семейство следующим образом. Если в момент времени $t \in (0; a_{mod}]$ имеется $N_L = L_{k,n,\alpha,\eta}(t) \geq 1$ индивидуумов когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$, то

$$\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t) = \left\{ t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(1)} + \omega_{L,\alpha,\eta}; \dots; t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(N_L)} + \omega_{L,\alpha,\eta} \right\},$$

$$0 < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(1)} < \dots < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(N_L)} \leq t < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(1)} + \omega_{L,\alpha,\eta} < \dots < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(N_L)} + \omega_{L,\alpha,\eta}.$$

Если для некоторого $t \in [0; a_{mod}]$ $L_{k,n,\alpha,\eta}(t) = 0$ (индивидуумы когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$ отсутствуют), то полагаем, что $\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t) = \emptyset$.

Индивидуумов когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ опишем с помощью их уникальных типов $t_I + \omega_{I,k,\varphi}$, где $t_I \in [0; a_{mod}]$ — момент времени, в который появился некоторый индивидуум этой когорты, $\omega_{I,k,\varphi}$ — допустимая длительность пребывания индивидуума в когорте,

$t_I + \omega_{I,k,\varphi}$ — момент времени, в который указанный индивидум может превратиться в индивидума когорты $U_{k,n,\gamma}$. Пусть $\widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t)$ — семейство уникальных типов индивидуумов когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, существующих в момент времени $t \in [0; a_{mod}]$. Если для $t \in (0; a_{mod}]$ верно $N_I = I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t) \geq 1$, то

$$\widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t) = \left\{ t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(1)} + \omega_{I,k,\varphi}; \dots; t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(N_I)} + \omega_{I,k,\varphi} \right\},$$

$$0 < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(1)} < \dots < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(N_I)} \leq t < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(1)} + \omega_{I,k,\varphi} < \dots < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(N_I)} + \omega_{I,k,\varphi}.$$

Если для некоторого $t \in [0; a_{mod}]$ $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t) = 0$ (индивидуумы когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ отсутствуют), то полагаем, что $\widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t) = \emptyset$.

Индивидуумов когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ опишем с помощью их уникальных типов $t_V + \omega_{V,k,\varphi}$, где $t_V \in [0; a_{mod}]$ — момент времени, в который появился некоторый индивидум этой когорты, $\omega_{V,k,\varphi}$ — допустимая длительность пребывания индивидуума в когорте, $t_V + \omega_{V,k,\varphi}$ — момент времени, в который указанный индивидум может превратиться в индивидума когорты $W_{k,n,\gamma}$. Пусть $\widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t)$ — семейство уникальных типов индивидуумов когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$, существующих в момент времени $t \in [0; a_{mod}]$. Если для $t \in (0; a_{mod}]$ верно $N_V = V_{k,n,\alpha,\varphi}(t) \geq 1$, то

$$\widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t) = \left\{ t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(1)} + \omega_{V,k,\varphi}; \dots; t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(N_V)} + \omega_{V,k,\varphi} \right\},$$

$$0 < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(1)} < \dots < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(N_V)} \leq t < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(1)} + \omega_{V,k,\varphi} < \dots < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(N_V)} + \omega_{V,k,\varphi}.$$

Если $V_{k,n,\alpha,\varphi}(t) = 0$ для некоторого $t \in [0; a_{mod}]$, то полагаем, что $\widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t) = \emptyset$.

Для изучения динамики рассматриваемых когорт при $t \in [0; a_{mod}]$ используем случайный процесс $Z(t) = (X(t), \Omega(t))$, где

$$X(t) = (S_{k,n,\alpha}(t), L_{k,n,\alpha,\eta}(t), I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t), U_{k,n,\gamma}(t), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t), W_{k,n,\gamma}(t)),$$

$$\Omega(t) = (\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t), \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t), \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t)),$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \gamma, \theta, \eta, \varphi \in J_3. \tag{3}$$

В ряде последующих выкладок используем индексы ℓ, σ, π, p , которые будем интерпретировать как «сквозную» нумерацию компонентов $X(t)$ и $\Omega(t)$ соответственно. Под $X_{[\ell]}(t)$, $X_{[\ell,\sigma]}(t)$ будем понимать $X(t)$, у которого соответственно исключена компонента с номером ℓ и исключены компоненты с номерами ℓ, σ , $1 \leq \ell, \sigma \leq 810$, $\ell \neq \sigma$. Под $\Omega_{[\pi]}(t)$, $\Omega_{[\pi,p]}(t)$ будем понимать $\Omega(t)$, у которого соответственно исключена компонента с номером π и исключены компоненты с номерами π, p , $1 \leq \pi, p \leq 675$, $\pi \neq p$. Обратимся к первым компонентам $X(t)$. Выражение $l_* = l_S(k_*, n_*, \alpha_*)$ будем понимать как номер переменной $S_{k,n,\alpha}(t)$ в «сквозной» нумерации компонент $X(t)$ для фиксированных $k = k_*$, $n = n_*$, $\alpha = \alpha_*$. Аналогичным образом определим выражения для зависимостей ℓ, σ, π, p от индексов остальных переменных, входящих в $X(t)$ и $\Omega(t)$.

2.2 Рекуррентные соотношения, описывающие изменения переменных модели

Случайный процесс $Z(t)$ зададим с помощью рекуррентных соотношений, учитывающих скачкообразное изменение его компонент в некоторые моменты времени t , обусловленные наступлением событий, описанных в предположениях Н1–Н8.

Пусть $t = t_j \in [0; a_{mod})$ — некоторый заданный момент времени, $j = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 = 0$. Примем, что компоненты $Z(t_j) = (X(t_j), \Omega(t_j))$ фиксированы, т.е. $X(t_j)$ — вектор

с фиксированными целочисленными неотрицательными компонентами

$$S_{k,n,\alpha}(t_j), L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j), I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j), U_{k,n,\gamma}(t_j), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j), W_{k,n,\gamma}(t_j), \quad (4)$$

а $\Omega(t_j) = (\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j), \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j), \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j))$ — набор семейств фиксированных уникальных типов индивидуумов соответствующих когорт, а именно:

$$\text{если } L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) = 0, \text{ то } \widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) = \emptyset, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{если } L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) = y_{L,j} \geq 1, \text{ то } \widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) &= \left\{ t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,1)} + \omega_{L,\alpha,\eta}; \dots; t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,y_{L,j})} + \omega_{L,\alpha,\eta} \right\}, \\ 0 < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,1)} < \dots < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,y_{L,j})} \leq t_j < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,1)} + \omega_{L,\alpha,\eta} < \dots < t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,y_{L,j})} + \omega_{L,\alpha,\eta}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{если } I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) = 0, \text{ то } \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) = \emptyset, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{если } I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) = y_{I,j} \geq 1, \text{ то } \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) &= \left\{ t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{I,k,\varphi}; \dots; t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,y_{I,j})} + \omega_{I,k,\varphi} \right\}, \\ 0 < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,1)} < \dots < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,y_{I,j})} \leq t_j < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{I,k,\varphi} < \dots < t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,y_{I,j})} + \omega_{I,k,\varphi}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{если } V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) = 0, \text{ то } \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) = \emptyset, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{если } V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) = y_{V,j} \geq 1, \text{ то } \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) &= \left\{ t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{V,k,\varphi}; \dots; t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,y_{V,j})} + \omega_{V,k,\varphi} \right\}, \\ 0 < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,1)} < \dots < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,y_{V,j})} \leq t_j < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{V,k,\varphi} < \dots < t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,y_{V,j})} + \omega_{V,k,\varphi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Индексы, используемые в (4)–(10), принимают значения, указанные в (3).

Опишем закон изменения компонент $Z(t_j)$, опираясь на блочную структуру переменных модели.

Обратимся к группе предположений Н1, Н2, Н3, Н5, Н7, не учитывая оставшиеся предположения модели. Пусть $(t_j; t_j + h)$ — бесконечно малый промежуток времени, $(t_j; t_j + h) \subset [0; a_{mod}]$, $h \rightarrow +0$. Примем, что вероятности переходов отдельных компонент $X(t_j)$ в одно из возможных состояний за промежуток $(t_j; t_j + h)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} P\{S_{k,n,\alpha}(t_j) \rightarrow S_{k,n,\alpha}(t_j) + 1\} &= r_{S,k,n,\alpha} h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha \in J_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P\{L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) \rightarrow L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) + 1\} &= r_{L,k,n,\alpha,\eta} h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P\{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) \rightarrow I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) + 1\} &= r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi} h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P\{S_{k,n,\alpha}(t_j) \rightarrow S_{k,n,\alpha}(t_j) - 1\} &= \mu_k S_{k,n,\alpha}(t_j) h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha \in J_3, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P\{L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) \rightarrow L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) - 1\} &= \mu_k L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P\{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) \rightarrow I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) - 1\} &= \mu_k I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) h + o(h), \\ k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \end{aligned} \quad (16)$$

$$P\{U_{k,n,\gamma}(t_j) \rightarrow U_{k,n,\gamma}(t_j) - 1\} = \mu_k U_{k,n,\gamma}(t_j) h + o(h),$$

$$k \in J_5, n, \gamma \in J_3, \tag{17}$$

$$P\{W_{k,n,\gamma}(t_j) \rightarrow W_{k,n,\gamma}(t_j)(t_j) - 1\} = \mu_k W_{k,n,\gamma}(t_j)h + o(h),$$

$$k \in J_5, n, \gamma \in J_3, \tag{18}$$

$$P\{(S_{k,n,\alpha}(t_j), L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j)) \rightarrow (S_{k,n,\alpha}(t_j) - 1, L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) + 1)\} =$$

$$= \sum_{\nu \in J_5} \sum_{m \in J_3} \sum_{\beta \in J_3} \sum_{\psi \in J_3} f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi} I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}(t_j) S_{k,n,\alpha}(t_j)h + o(h),$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \tag{19}$$

$$P\{(I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j)) \rightarrow (I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) - 1, V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) + 1)\} =$$

$$= g_{k,\varphi} I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j)h + o(h), \quad k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \tag{20}$$

$$P\{V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) \rightarrow V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) - 1\} = \rho_{k,\varphi} V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j)h + o(h),$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \varphi \in J_3. \tag{21}$$

Для краткости записи в каждом из соотношений (11)–(21) приведены только те компоненты $X(t_j)$, которые подвержены изменению, остальные компоненты $X(t_j)$ сохраняются неизменными на промежутке $(t_j; t_j + h)$. Одновременное наступление двух и более из перечисленных в (11)–(21) переходов имеет порядок $o(h)$, и с вероятностью $1 - R(X(t_j))h + o(h)$ ни один из указанных переходов на промежутке $(t_j; t_j + h)$ не происходит, где

$$R(X(t_j)) = R_1(X(t_j)) + R_2(X(t_j)) + \dots + R_{11}(X(t_j)) > 0, \tag{22}$$

$$R_1(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} r_{S,k,n,\alpha},$$

$$R_2(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\eta \in J_3} r_{L,k,n,\alpha,\eta},$$

$$R_3(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\eta \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} r_{I,k,n,\alpha,\eta,\varphi},$$

$$R_4(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \mu_k S_{k,n,\alpha}(t_j),$$

$$R_5(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\eta \in J_3} \mu_k L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j),$$

$$R_6(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\theta \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} \mu_k I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j),$$

$$R_7(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\gamma \in J_3} \mu_k U_{k,n,\gamma}(t_j),$$

$$R_8(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\gamma \in J_3} \mu_k W_{k,n,\gamma}(t_j),$$

$$R_9(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\eta \in J_3} \sum_{\nu \in J_5} \sum_{m \in J_3} \sum_{\beta \in J_3} \sum_{\psi \in J_3} f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi} I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}(t_j) S_{k,n,\alpha}(t_j),$$

$$R_{10}(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\theta \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} g_{k,\varphi} I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j),$$

$$R_{11}(X(t_j)) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} \rho_{k,\varphi} V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j).$$

Пусть τ_j — момент первого изменения $X(t_j)$, считая от t_j , в соответствии с переходами, указанными формулами (11)–(21). Принимаем, что

$$\tau_j = t_j + \xi_j, \quad (23)$$

где ξ_j — случайная величина с экспоненциальным распределением, параметр которого $R(X(t_j))$ приведен в формуле (22). Отметим, что изменения компонент $X(t_j)$ могут приводить к изменениям некоторых компонент $\Omega(t_j)$ (см. далее).

Обратимся к предположениям Н4, Н6, Н8 без учета Н1, Н2, Н3, Н5, Н7. Рассмотрим компоненты $\Omega(t_j)$, заданные соотношениями (5)–(10). Положим:

$$\chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)} = t_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j,1)} + \omega_{L,\alpha,\eta}, \text{ если } \widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) \neq \emptyset, \quad (24)$$

$$\chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)} = +\infty, \text{ если } \widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) = \emptyset. \quad (25)$$

В формуле (24) величина $\chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)}$ означает ближайший к t_j момент осуществления событий, описанных в предположении Н4. Формула (25) учитывает случай, когда наступление указанных событий невозможно вследствие отсутствия индивидуумов когорты $L_{k,n,\alpha,\eta}$. Далее,

$$\chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)} = t_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{I,k,\varphi}, \text{ если } \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) \neq \emptyset, \quad (26)$$

$$\chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)} = +\infty, \text{ если } \widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) = \emptyset. \quad (27)$$

В формуле (26) величина $\chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)}$ означает ближайший к t_j момент осуществления событий, описанных в предположении Н6. Формула (27) учитывает случай, когда наступление указанных событий невозможно вследствие отсутствия индивидуумов когорты $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$. Пусть, наконец,

$$\chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)} = t_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j,1)} + \omega_{V,k,\varphi}, \text{ если } \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) \neq \emptyset, \quad (28)$$

$$\chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)} = +\infty, \text{ если } \widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) = \emptyset. \quad (29)$$

В формуле (28) величина $\chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)}$ означает ближайший к t_j момент осуществления событий, описанных в предположении Н8. Формула (29) учитывает случай, когда наступление указанных событий невозможно вследствие отсутствия индивидуумов когорты $V_{k,n,\alpha,\varphi}$.

Индексы, используемые в (24)–(29), принимают значения, указанные в (3).

Введем момент времени t_{j+1} по формуле:

$$t_{j+1} = \min\{a_{mod}, \tau_j, \chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)}, \chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)}, \chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)}, k \in J_5, n, \alpha, \eta, \theta, \varphi \in J_3\}. \quad (30)$$

Примем, что в (30)

$$t_{n+1} = a_{mod}. \quad (31)$$

Тогда $Z(t_j)$ сохраняется неизменным до конца промежутка моделирования и, как следствие,

$$X(t_{j+1}) = X(t_j), \quad \Omega(t_{j+1}) = \Omega(t_j). \quad (32)$$

Примем, что в (30)

$$t_{j+1} = \tau_j. \quad (33)$$

Тогда изменения $X(t_j)$, $\Omega(t_j)$ обусловлены переходами $X(t_j) \rightarrow X(t_{j+1})$ в одно из состояний $X(t_{j+1})$, обусловленных соотношениями (11)–(21). Полагаем, что

$$P\{S_{k,n,\alpha}(t_j) \rightarrow S_{k,n,\alpha}(t_{j+1}) = S_{k,n,\alpha}(t_j) + 1\} = \frac{r_{S,k,n,\alpha}}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha \in J_3, \quad (34)$$

$$P\{L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) \rightarrow L_{k,n,\alpha,\eta}(t_{j+1}) = L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) + 1\} = \frac{r_{L,k,n,\alpha,\eta}}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \quad (35)$$

$$P\{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) \rightarrow I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_{j+1}) = I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) + 1\} = \frac{r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \quad (36)$$

$$P\{S_{k,n,\alpha}(t_j) \rightarrow S_{k,n,\alpha}(t_{j+1}) = S_{k,n,\alpha}(t_j) - 1\} = \frac{\mu_k S_{k,n,\alpha}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha \in J_3, \quad (37)$$

$$P\{L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) \rightarrow L_{k,n,\alpha,\eta}(t_{j+1}) = L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) - 1\} = \frac{\mu_k L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \quad (38)$$

$$P\{I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) \rightarrow I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_{j+1}) = I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) - 1\} = \frac{\mu_k I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \quad (39)$$

$$P\{U_{k,n,\gamma}(t_j) \rightarrow U_{k,n,\gamma}(t_{j+1}) = U_{k,n,\gamma}(t_j) - 1\} = \frac{\mu_k U_{k,n,\gamma}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \gamma \in J_3, \quad (40)$$

$$P\{W_{k,n,\gamma}(t_j) \rightarrow W_{k,n,\gamma}(t_{j+1}) = W_{k,n,\gamma}(t_j) - 1\} = \frac{\mu_k W_{k,n,\gamma}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \gamma \in J_3, \quad (41)$$

$$P\{(S_{k,n,\alpha}(t_j), L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j)) \rightarrow (S_{k,n,\alpha}(t_{j+1}), L_{k,n,\alpha,\eta}(t_{j+1})) =$$

$$= (S_{k,n,\alpha}(t_j) - 1, L_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) + 1)\} =$$

$$= \frac{\sum_{\nu \in J_5} \sum_{m \in J_3} \sum_{\beta \in J_3} \sum_{\psi \in J_3} f_{k,n,\alpha,\nu,m,\eta,\psi} I_{\nu,m,\beta,\eta,\psi}(t_j) S_{k,n,\alpha}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \eta \in J_3, \quad (42)$$

$$P\{(I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j)) \rightarrow (I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_{j+1}), V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_{j+1})) =$$

$$= (I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) - 1, V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) + 1)\} = \frac{g_{k,\varphi} I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3, \quad (43)$$

$$P\{V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) \rightarrow V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_{j+1}) = V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) - 1\} = \frac{\rho_{k,\varphi} V_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j)}{R(X(t_j))},$$

$$k \in J_5, n, \alpha, \varphi \in J_3. \quad (44)$$

Пусть произошел переход (34) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_{j+1}) &= S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_j) + 1, \quad X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) = X_{[\ell_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_S(k_*, n_*, \alpha_*), \quad \Omega(t_{j+1}) = \Omega(t_j). \end{aligned} \quad (45)$$

Пусть произошел переход (35) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \eta_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) \cup \{t_{j+1} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}, \\ X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \quad \pi_* = \pi_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \end{aligned} \quad (46)$$

где $\{t_{j+1} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}$ — новый элемент, пополняющий $\widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (36) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) \cup \{t_{j+1} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_I(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \quad \pi_* = \pi_I(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \end{aligned} \quad (47)$$

где $\{t_{j+1} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}$ — новый элемент, пополняющий $\widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (37) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_{j+1}) &= S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_j) - 1, \quad X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) = X_{[\ell_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_S(k_*, n_*, \alpha_*), \quad \Omega(t_{j+1}) = \Omega(t_j). \end{aligned} \quad (48)$$

Пусть произошел переход (38) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \eta_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) - 1, \\ \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) \setminus \{t_{L, k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}^{(j, d)} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}, \\ X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \quad \pi_* = \pi_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \end{aligned} \quad (49)$$

где $\{t_{L, k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}^{(j, d)} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j)$ с вероятностью $1/L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (39) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) - 1, \\ \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) \setminus \{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_I(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \quad \pi_* = \pi_I(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \end{aligned} \quad (50)$$

где $\{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$ с вероятностью

$1/I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (40) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \gamma_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} U_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_{j+1}) &= U_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_j) - 1, \quad X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) = X_{[\ell_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_U(k_*, n_*, \gamma_*), \quad \Omega(t_{j+1}) = \Omega(t_j). \end{aligned} \quad (51)$$

Пусть произошел переход (41) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \gamma_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} W_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_{j+1}) &= W_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_j) - 1, \quad X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) = X_{[\ell_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_W(k_*, n_*, \gamma_*), \quad \Omega(t_{j+1}) = \Omega(t_j). \end{aligned} \quad (52)$$

Пусть произошел переход (42) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \eta_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_{j+1}) &= S_{k_*, n_*, \alpha_*}(t_j) - 1, \quad L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) = L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) \cup \{t_{j+1} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}, \\ X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_S(k_*, n_*, \alpha_*), \quad \sigma_* = \sigma_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \quad \pi_* = \pi_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\{t_{j+1} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}$ — новый элемент, пополняющий $\widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (43) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) - 1, \quad V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) = V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) \setminus \{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}, \\ \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) \cup \{t_{j+1} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*, p_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*, p_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*), \quad \sigma_* = \sigma_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \\ \pi_* &= \pi_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*), \quad p_* = p_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \end{aligned} \quad (54)$$

где $\{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$ с вероятностью $1/I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$, $\{t_{j+1} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}$ — новый элемент, пополняющий $\widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j)$.

Пусть произошел переход (44) для некоторых $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \varphi_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned} V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) - 1, \\ \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) \setminus \{t_{V, k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \quad \pi_* = \pi_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \end{aligned} \quad (55)$$

где $\{t_{V, k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}^{(j, d)} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j)$ с вероятностью $1/V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j)$.

Примем, что в (30)

$$t_{j+1} = \chi_{L, k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}^{(j)} \quad (56)$$

где $k_* \in J_5, n_*, \alpha_*, \eta_* \in J_3$ — фиксированный набор индексов. Тогда:

$$L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) = L_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) - 1,$$

$$\begin{aligned}\widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_{j+1}) &= \widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j) \setminus \{t_{L, k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}^{(j,1)} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}, \\ \ell_* &= \ell_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*), \quad \pi_* = \pi_L(k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*),\end{aligned}\quad (57)$$

где $\{t_{L, k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}^{(j,1)} + \omega_{L, \alpha_*, \eta_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{L}_{k_*, n_*, \alpha_*, \eta_*}(t_j)$. Далее, следуя предположению Н4, полагаем, что

$$\begin{aligned}P\{I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta, \varphi}(t_j) \rightarrow I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta, \varphi}(t_{j+1}) = I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta, \varphi}(t_j) + 1\} &= q_{\theta, \varphi}(k_*, \alpha_*, \eta_*), \\ \theta, \varphi &\in J_3.\end{aligned}\quad (58)$$

Пусть в (58) произошел переход при некоторых $\theta_*, \varphi_* \in J_3$. Тогда:

$$\begin{aligned}I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) \cup \{t_{j+1} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_j), \quad \sigma_* = \sigma_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*), \\ \Omega_{[\pi_*, p_*]}(t_{j+1}) &= \Omega_{[\pi_*, p_*]}(t_j), \quad p_* = p_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*),\end{aligned}\quad (59)$$

где $\{t_{j+1} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}$ — новый элемент, пополняющий $\widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$.

Примем, что в (30)

$$t_{j+1} = \chi_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j)}, \quad (60)$$

где $k_* \in J_5$, $n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_* \in J_3$ — фиксированный набор индексов. Следуя предположению Н6, положим: $\gamma_* = \gamma(\alpha_*, \varphi_*)$. Тогда:

$$\begin{aligned}I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= I_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) - 1, \quad U_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_{j+1}) = U_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j) \setminus \{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j,1)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*), \quad \sigma_* = \sigma_U(k_*, n_*, \gamma_*), \quad \pi_* = \pi_I(k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*),\end{aligned}\quad (61)$$

где $\{t_{I, k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}^{(j,1)} + \omega_{I, k_*, \varphi_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{I}_{k_*, n_*, \alpha_*, \theta_*, \varphi_*}(t_j)$.

Примем, что в (30)

$$t_{j+1} = \chi_{V, k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}^{(j)}, \quad (62)$$

где $k_* \in J_5$, $n_*, \alpha_*, \varphi_* \in J_3$ — фиксированный набор индексов. Следуя предположению Н8, положим: $\gamma_* = \gamma(\alpha_*, \varphi_*)$. Тогда:

$$\begin{aligned}V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= V_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) - 1, \quad W_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_{j+1}) = W_{k_*, n_*, \gamma_*}(t_j) + 1, \\ \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_{j+1}) &= \widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j) \setminus \{t_{V, k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}^{(j,1)} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}, \\ X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_{j+1}) &= X_{[\ell_*, \sigma_*]}(t_j), \quad \Omega_{[\pi_*]}(t_{j+1}) = \Omega_{[\pi_*]}(t_j), \\ \ell_* &= \ell_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*), \quad \sigma_* = \sigma_W(k_*, n_*, \gamma_*), \quad \pi_* = \pi_V(k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*),\end{aligned}\quad (63)$$

где $\{t_{V, k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}^{(j,1)} + \omega_{V, k_*, \varphi_*}\}$ — элемент, исключаемый из $\widehat{V}_{k_*, n_*, \alpha_*, \varphi_*}(t_j)$.

В дополнение к соотношениям (4)–(63) примем, что

$$Z(t) = Z(t_j) = (X(t_j), \Omega(t_j)), \quad t \in [t_j; t_{j+1}). \quad (64)$$

Если выполнено соотношение (31), то завершаем описание процесса $Z(t)$. Если соотношение (31) не выполнено, то заменяем t_j на t_{j+1} , фиксируем компоненты $Z(t_{j+1})$,

находим момент времени t_{j+2} , применяя формулу (30) и, используя t_{j+2} , $Z(t_{j+1})$, повторяем процедуру, заданную формулами (31)–(64).

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование модели проводится с помощью метода Монте-Карло. Для проведения вычислительных экспериментов и построения реализаций изучаемых переменных на промежутке $[0; a_{mod}]$ используется алгоритм, основанный на рекуррентных соотношениях, описанных в предыдущем разделе. Для генерации возникающих в алгоритме случайных величин применяются формулы и датчики псевдослучайных чисел, описанные в работах [29]–[31]. Алгоритм моделирования состоит из нескольких шагов.

На нулевом шаге задаем значения параметров модели, константу a_{mod} , полагаем $t_0 = 0$, $j = 0$, фиксируем начальное состояние переменных модели $Z(t_0) = (X(t_0), \Omega(t_0))$; кроме того, задаем константу a_∞ , такую, что $a_\infty > a_{mod}$.

На первом шаге для фиксированных j и t_j вычисляем константу $R(X(t_j))$ по формуле (22). Находим величину τ_j по формуле (23), генерируя экспоненциально распределенную случайную величину ξ_j с параметром $R(X(t_j))$. Переходим на второй шаг.

На втором шаге для фиксированных j и t_j находим набор величин

$$\chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)}, \chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)}, \chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)}, k \in J_5, n, \alpha, \eta, \theta, \varphi \in J_3,$$

используя формулы (24)–(29). Если для некоторого набора индексов выполнено любое из соотношений $\widehat{L}_{k,n,\alpha,\eta}(t_j) = \emptyset$, $\widehat{I}_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t_j) = \emptyset$, $\widehat{V}_{k,n,\alpha,\varphi}(t_j) = \emptyset$, то полагаем соответственно, что $\chi_{L,k,n,\alpha,\eta}^{(j)} = a_\infty$, $\chi_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi}^{(j)} = a_\infty$, $\chi_{V,k,n,\alpha,\varphi}^{(j)} = a_\infty$. Переходим на третий шаг.

На третьем шаге вычисляем момент времени t_{j+1} по формуле (30). Если выполнено соотношение (31), то находим компоненты $Z(t_{j+1})$ по формуле (32), и завершаем моделирование процесса $Z(t)$. Пусть соотношение (31) не выполнено. При выполнении одного из соотношений (33), (56), (60), (62) переходим соответственно на четвертый, пятый, шестой или седьмой шаг.

На четвертом шаге находим компоненты $Z(t_{j+1})$, $\Omega(t_{j+1})$ с помощью соотношений (34)–(55). Для поиска возможных переходов $X(t_j) \rightarrow X(t_{j+1})$ используем алгоритм моделирования дискретной случайной величины, заданной законом распределения (34)–(44). Для нахождения элемента $\{t_{L,k_*,n_*,\alpha_*,\eta_*}^{(j,d)} + \omega_{L,\alpha_*,\eta_*}\}$, исключаемого из $\widehat{L}_{k_*,n_*,\alpha_*,\eta_*}(t_j)$, генерируем номер этого элемента d , распределенного равномерно на множестве целых чисел $1, 2, \dots, L_{k_*,n_*,\alpha_*,\eta_*}(t_j)$. Для нахождения элемента $\{t_{I,k_*,n_*,\alpha_*,\theta_*,\varphi_*}^{(j,d)} + \omega_{I,k_*,\theta_*,\varphi_*}\}$, исключаемого из $\widehat{I}_{k_*,n_*,\alpha_*,\theta_*,\varphi_*}(t_j)$, генерируем номер этого элемента d , распределенного равномерно на множестве целых чисел $1, 2, \dots, I_{k_*,n_*,\alpha_*,\theta_*,\varphi_*}(t_j)$. Для нахождения элемента $\{t_{V,k_*,n_*,\alpha_*,\varphi_*}^{(j,d)} + \omega_{V,k_*,\varphi_*}\}$, исключаемого из $\widehat{V}_{k_*,n_*,\alpha_*,\varphi_*}(t_j)$, генерируем номер этого элемента d , распределенного равномерно на множестве целых чисел $1, 2, \dots, V_{k_*,n_*,\alpha_*,\varphi_*}(t_j)$. Заменяем j на $j + 1$ и возвращаемся на первый шаг.

На пятом шаге находим часть компонент $Z(t_{j+1})$, используя формулы (57) и генерируя переход (58) с помощью алгоритма моделирования дискретной случайной величины с заданным законом распределения. Полагая, что переход (58) осуществился для индексов θ_* , φ_* , находим оставшиеся компоненты $Z(t_{j+1})$ по формулам (59). Заменяем j на $j + 1$ и возвращаемся на первый шаг.

На шестом шаге находим компоненты $Z(t_{j+1})$, используя формулы (61). Заменяем j на $j + 1$ и возвращаемся на первый шаг.

На седьмом шаге находим компоненты $Z(t_{j+1})$, используя формулы (63). Заменяем j на $j + 1$ и возвращаемся на первый шаг.

Разработанный алгоритм моделирования реализован в виде консольной моделирующей программы, написанной на языке программирования C++ в интегрированной среде разработки Visual Studio 2008. Входные параметры считываются из специального конфигурационного ini-файла. Результаты моделирования – реализации переменных модели сохраняются в отдельный текстовый файл.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Целью вычислительных экспериментов являлось исследование динамики численности когорт для наборов параметров, отражающих различные варианты передачи инфекции между индивидуумами в условиях, когда популяция впервые встречается с новой респираторной инфекцией. Предполагается, что приведенные ниже варианты могут объяснять скорость распространения новой респираторной инфекции в течение первых нескольких месяцев от начала развития эпидемического процесса.

- Вариант А. К супер–распространителям отнесем индивидуумов когорт $I_{2,3,\beta,3,1}$, $I_{3,3,\beta,3,1}$, $I_{4,3,\beta,3,1}$ для каждого из индексов $\beta = 1, 2, 3$. Здесь существенно, что уровень контактности $m = 3$, тяжесть заболевания $\psi = 1$, уровень заразности $\eta = 3$ этих индивидуумов обеспечивают наибольшее значение интенсивности контактов $f_{k,n,\alpha,2,3,3,1}$, $f_{k,n,\alpha,3,3,3,1}$, $f_{k,n,\alpha,4,3,3,1}$ с индивидуумами когорт $S_{k,n,\alpha}$ при фиксированных значениях индексов k, n, α .

- Вариант Б. К супер–распространителям отнесем индивидуумов, биологически предрасположенных к хорошей переносимости инфекции и активному выделению вирусных частиц в окружающую среду. Под такими индивидуумами будем понимать индивидуумов когорт $I_{v,m,3,3,1}$ для каждого из индексов $v = 2, 3, 4$, $m = 1, 2, 3$. В этом варианте существенно, что уровень иммунитета $\beta = 3$, уровень заразности $\eta = 3$, тяжесть заболевания $\psi = 1$ этих индивидуумов обеспечивают наибольшее значение интенсивности контактов $f_{k,n,\alpha,v,m,3,1}$ с индивидуумами когорт $S_{k,n,\alpha}$ при фиксированных значениях индексов k, n, α, v, m .

В излагаемом в настоящей работе этапе исследования динамики распространения новой для популяции инфекции конкретные значения практически всех параметров модели являются неизвестными. Поэтому при проведении вычислительных экспериментов набор параметров модели, включая распределение первоначально существующих индивидуумов по отдельным когортам, задавался, исходя из экспертной оценки некоторых параметров по общедоступным данным. К таким параметрам можно отнести, например, среднюю продолжительность жизни индивидуумов, длительность латентной стадии инфекционного процесса, длительности различных стадий заболевания. Значения части параметров выбраны исключительно из ограничений, описанных в предположениях модели. Представленные ниже результаты вычислительных экспериментов получены при вариации параметров, которые непосредственно связаны с описанием вариантов А и Б распространения инфекции.

Пусть интенсивности контактов индивидуумов задаются выражением

$$f_{k,n,\alpha,v,m,\eta,\psi} = f_{k,v}^* \frac{c_1 n m \eta}{(1 + c_2 \alpha)(1 + c_3 \psi)},$$

где c_1, c_2, c_3 — положительные безразмерные константы, множитель $f_{k,v}^* > 0$ учитывает интенсивность контактов индивидуумов только в зависимости от номеров их групп,

причем $f_{k,\nu}^* = f_{\nu,k}^*$ для всех значений индексов k, ν , размерность «1/сутки». Значения $f_{k,\nu}^*$ при $\nu \geq k$ представлены в виде матрицы

$$f^* = (f_{k,\nu}^*) = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.01 \\ & & 0.05 & 0.05 & 0.02 \\ & & & 0.05 & 0.01 \\ & & & & 0.04 \end{pmatrix}, \quad (\text{сутки}^{-1}).$$

Константы c_1, c_2, c_3 таковы: $c_1 = 0.03, c_2 = 75, c_3 = 100$.

Полагаем, что вероятности превращения индивидуумов когорт $L_{k,n,\alpha,\eta}$ в индивидуумов когорт $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_{\theta,1}(1, 1, \eta) &= 0, \quad q_{\theta,2}(1, 1, \eta) = 1/4, \quad q_{\theta,3}(1, 1, \eta) = 1/12, \quad \theta, \eta = 1, 2, 3; \\ q_{\theta,1}(1, 2, 1) &= 1/4, \quad q_{\theta,2}(1, 2, 1) = 1/12, \quad q_{\theta,3}(1, 2, 1) = 0, \quad \theta = 1, 2, 3; \\ q_{\theta,1}(1, 2, \eta) &= 1/12, \quad q_{\theta,2}(1, 2, \eta) = 1/4, \quad q_{\theta,3}(1, 2, \eta) = 0, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad \eta = 2, 3; \\ q_{1,1}(1, 3, 1) &= 1/2, \quad q_{1,2}(1, 3, 1) = q_{1,3}(1, 3, 1) = 0, \\ q_{\theta,1}(1, 3, 1) &= 1/4, \quad q_{\theta,2}(1, 3, 1) = q_{\theta,3}(1, 3, 1) = 0, \quad \theta = 2, 3; \\ q_{\theta,1}(1, 3, \eta) &= 1/4, \quad q_{\theta,2}(1, 3, \eta) = q_{\theta,3}(1, 3, \eta) = 0, \quad \theta = 1, 3, \\ q_{2,1}(1, 3, \eta) &= 1/2, \quad q_{2,2}(1, 3, \eta) = q_{2,3}(1, 3, \eta) = 0, \quad \eta = 2, 3; \\ q_{\theta,1}(k, 1, \eta) &= q_{\theta,2}(k, 1, \eta) = 0, \quad q_{\theta,3}(k, 1, \eta) = 1/4, \quad \theta = 1, 3, \\ q_{2,1}(k, 1, \eta) &= q_{2,2}(k, 1, \eta) = 0, \quad q_{2,3}(k, 1, \eta) = 1/2, \quad k = 2, 3, 4, \quad \eta = 1, 2; \\ q_{1,1}(k, 1, 3) &= q_{1,2}(k, 1, 3) = 0, \quad q_{1,3}(k, 1, 3) = 1/5, \\ q_{\theta,1}(k, 1, 3) &= q_{\theta,2}(k, 1, 3) = 0, \quad q_{\theta,3}(k, 1, 3) = 2/5, \quad \theta = 2, 3, \quad k = 2, 3, 4; \\ q_{\theta,1}(k, 2, \eta) &= q_{\theta,3}(k, 2, \eta) = 1/12, \quad q_{\theta,2}(k, 2, \eta) = 1/6, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, 4, \quad \eta = 1, 2; \\ q_{\theta,1}(k, 2, 3) &= q_{\theta,2}(k, 2, 3) = 1/12, \quad q_{\theta,3}(k, 2, 3) = 1/6, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, 4; \\ q_{\theta,1}(k, 3, \eta) &= 1/4, \quad q_{\theta,2}(k, 3, \eta) = 1/12, \quad q_{\theta,3}(k, 3, \eta) = 0, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, 4, \quad \eta = 1, 2; \\ q_{\theta,1}(k, 3, 3) &= 1/12, \quad q_{\theta,2}(k, 3, 3) = 1/4, \quad q_{\theta,3}(k, 3, 3) = 0, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, 4; \\ q_{\theta,1}(5, 1, 1) &= 0, \quad q_{\theta,2}(5, 1, 1) = 1/5, \quad q_{\theta,3}(5, 1, 1) = 1/6, \quad \theta = 1, 2, \\ q_{3,1}(5, 1, 1) &= 0, \quad q_{3,2}(5, 1, 1) = 1/5, \quad q_{3,3}(5, 1, 1) = 1/15; \\ q_{\theta,1}(5, 1, 2) &= 0, \quad q_{\theta,2}(5, 1, 2) = 1/8, \quad q_{\theta,3}(5, 1, 2) = 1/4, \quad \theta = 1, 2, \\ q_{3,1}(5, 1, 2) &= 0, \quad q_{3,2}(5, 1, 2) = q_{3,3}(5, 1, 2) = 1/8; \\ q_{1,1}(5, 1, 3) &= 0, \quad q_{1,2}(5, 1, 3) = 1/10, \quad q_{1,3}(5, 1, 3) = 3/10, \\ q_{\theta,1}(5, 1, 3) &= 0, \quad q_{\theta,2}(5, 1, 3) = 1/10, \quad q_{\theta,3}(5, 1, 3) = 1/5, \quad \theta = 2, 3; \\ q_{\theta,1}(5, 2, 1) &= q_{\theta,2}(5, 2, 1) = 1/5, \quad q_{\theta,3}(5, 2, 1) = 0, \quad \theta = 1, 2, \\ q_{3,1}(5, 2, 1) &= 1/5, \quad q_{3,2}(5, 2, 1) = q_{3,3}(5, 2, 1) = 0; \\ q_{\theta,1}(5, 2, \eta) &= 0, \quad q_{\theta,2}(5, 2, \eta) = q_{\theta,3}(5, 2, \eta) = 1/6, \quad \theta = 1, 2, 3, \quad \eta = 2, 3; \\ q_{\theta,1}(5, 3, 1) &= 2/5, \quad q_{\theta,2}(5, 3, 1) = q_{\theta,3}(5, 3, 1) = 0, \quad \theta = 1, 2, \end{aligned}$$

$$q_{3,1}(5, 3, 1) = 1/5, \quad q_{3,2}(5, 3, 1) = q_{3,3}(5, 3, 1) = 0;$$

$$q_{\theta,1}(5, 3, 2) = q_{\theta,2}(5, 3, 2) = 1/8, \quad q_{\theta,3}(5, 3, 2) = 1/12, \quad \theta = 1, 2, 3;$$

$$q_{\theta,1}(5, 3, 3) = 1/12, \quad q_{\theta,2}(5, 3, 3) = q_{\theta,3}(5, 3, 3) = 1/8, \quad \theta = 1, 2, 3.$$

Зависимость уровня приобретенного иммунитета $\gamma = \gamma(\alpha, \varphi)$ у индивидуумов когорт $U_{k,n,\gamma}$, $W_{k,n,\gamma}$ в зависимости от их исходного уровня иммунитета α и тяжести перенесенного заболевания φ задается следующими соотношениями:

$$\gamma = 1, \text{ если } (\alpha, \varphi) = (1, 1), \quad \gamma = 2, \text{ если } (\alpha, \varphi) = (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2),$$

$$\gamma = 3, \text{ если } (\alpha, \varphi) = (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3).$$

Скорости миграционных притоков индивидуумов в различные группы и интенсивности переходов индивидуумов в когорту Z ($k \in J_5, n, \alpha, \theta, \varphi \in J_3$):

$$r_{S,k,n,\alpha} = 1/25, \quad r_{L,k,n,\alpha,\theta} = 1/40, \quad \mu_k = 5 \cdot 10^{-5}, \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$r_{I,k,n,\alpha,\theta,\varphi} = 1/40, \quad k \neq 2, 3, 4, \quad n \neq 3, \quad \theta \neq 3, \quad \varphi \neq 1, \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$r_{I,2,3,\alpha,3,1} = 10^{-5}, \quad r_{I,3,3,\alpha,3,1} = r_{I,4,3,\alpha,3,1} = 10^{-4}, \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

Длительности пребывания индивидуумов в когортах L , I , V с учетом их параметрического описания таковы:

$$\omega_{L,\alpha,\theta} = 6, \quad \alpha, \theta \in J_3, \quad (\text{сутки}),$$

$$\omega_{I,k,1} = 7, \quad \omega_{I,k,2} = 12, \quad \omega_{I,k,3} = 14, \quad (\text{сутки}),$$

$$\omega_{V,k,1} = 14, \quad \omega_{V,k,2} = 21, \quad \omega_{V,k,3} = 30, \quad k \in J_5, \quad (\text{сутки}).$$

Интенсивности превращения индивидуумов когорт $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$ в индивидуумов когорт $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ вследствие развития или выявления заболевания и интенсивности гибели индивидуумов когорт $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ вследствие причин, вызванных инфекцией, задаются матрицами

$$g = (g_{k,\varphi}) = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/5 & 1/4 \\ 1/10 & 1/5 & 1/4 \\ 1/10 & 1/5 & 1/4 \\ 1/10 & 1/5 & 1/4 \\ 1/7 & 1/5 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \rho = (\rho_{k,\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/100 & 1/80 & 1/50 \\ 1/80 & 1/40 & 1/20 \\ 1/80 & 1/40 & 1/20 \\ 1/60 & 1/30 & 1/15 \end{pmatrix}, \quad (\text{сутки}^{-1}).$$

Обозначим через

$$S(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} S_{k,n,\alpha}(t), \quad I(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\theta \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}(t),$$

$$L(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\theta \in J_3} L_{k,n,\alpha,\theta}(t), \quad U(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} U_{k,n,\alpha}(t),$$

$$V(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} \sum_{\varphi \in J_3} V_{k,n,\alpha,\varphi}(t), \quad W(t) = \sum_{k \in J_5} \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} W_{k,n,\alpha}(t)$$

общую численность когорт S , I , L , U , V , W в момент времени $t \geq 0$ соответственно.

Полагаем, что начальные численности когорт во всех экспериментах таковы:

$$S(0) = 10^6, \quad I(0) = L(0) = U(0) = V(0) = W(0) = 0.$$

Обозначим через $\tilde{S}_k(0) = \sum_{n \in J_3} \sum_{\alpha \in J_3} S_{k,n,\alpha}(0)$ общую начальную численность индивидуумов возрастной группы $k \in J_5$. Примем, что во всех экспериментах $\tilde{S}_k(0)$ составляет, соответственно, 10 %, 20 %, 25 %, 30 %, 15 % от общей численности $S(0)$ восприимчивых индивидуумов для $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(0) &= 10^5, & \tilde{S}_2(0) &= 2 \cdot 10^5, \\ \tilde{S}_3(0) &= 2.5 \cdot 10^5, & \tilde{S}_4(0) &= 3 \cdot 10^5, & \tilde{S}_5(0) &= 1.5 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Исследуем динамику переменных $S(t), I(t), L(t), U(t), V(t), W(t)$ на промежутке $[0; 120]$ суток. Будем варьировать распределения численности когорт $S_{k,n,\alpha}$ на момент $t = 0$ начала распространения эпидемии. Примем, что варьируемые значения $S_{k,n,\alpha}(0)$ затрагивают когорты, индексы которых соответствуют значениям k, n, α , указанным в вариантах А и Б. Для сравнения вариантов А и Б используем величину T_* — момент времени, когда переменная $V(t)$ впервые достигнет некоторого порогового уровня V_* . Пороговый уровень V_* может означать, например, количество всех имеющихся коек в специализированных больницах. В дальнейших расчетах примем, что $V_* = 20000$. В каждом из вычислительных экспериментов строятся интервальные оценки математического ожидания ET_* величины T_* по стандартным формулам математической статистики для выборок большого объема [32]. Интервальные оценки для ET_* находятся по 100 независимым реализациям моделируемого случайного процесса.

Эксперимент 1. Считаем, что начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ фиксированной возрастной группы $k \in J_5$ распределены по уровням контактности и иммунитета (индексы $n \in J_3, \alpha \in J_3$) практически равными долями от $\tilde{S}_k(0)$. В таблице 1 представлены начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 1. На рисунке 2

Таблица 1. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 1

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	11111	11111	11111	$n = 1$	22222	22222	22222	$n = 1$	27777	27777	27777
$n = 2$	11111	11111	11111	$n = 2$	22222	22222	22222	$n = 2$	27777	27777	27777
$n = 3$	11111	11111	11112	$n = 3$	22222	22222	22224	$n = 3$	27777	27777	27784
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	33333	33333	33333	$n = 1$	16666	16666	16666			
	$n = 2$	33333	33333	33333	$n = 2$	16666	16666	16666			
	$n = 3$	33333	33333	33336	$n = 3$	16666	16666	16672			

приведены 5 типичных реализаций вспомогательных переменных $\log_{10}(S(t) + 1), \log_{10}(U(t) + 1), \log_{10}(L(t) + 1), \log_{10}(I(t) + 1), \log_{10}(V(t) + 1), \log_{10}(W(t) + 1)$; шкала времени задана в сутках.

Проведенные вычисления показывают, что отдельные реализации моделируемого случайного процесса «похожи» друг на друга и различия между реализациями в каждый момент времени не очень велики. Это объясняет довольно «тесное» расположение реализаций на рисунке 2. Аналогичная динамика отдельных реализаций моделируемого случайного процесса имеет место и для описанных ниже экспериментов 2–10. Отметим, что для каждого из экспериментов 1–10 различия между параметрами модели связаны с

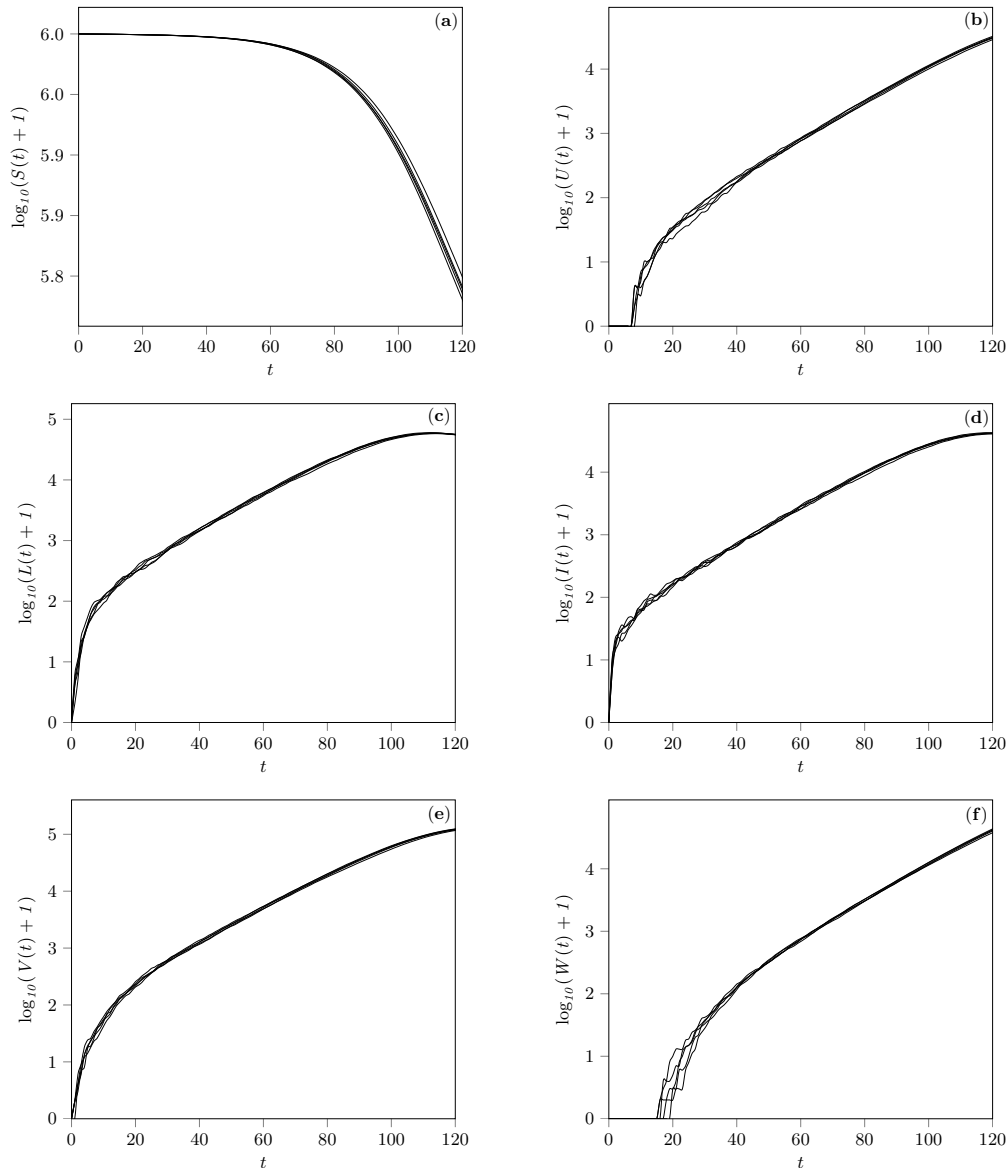


Рис. 2. Эксперимент 1: пять типичных реализаций переменных $\log_{10}(S(t) + 1)$ (а), $\log_{10}(U(t) + 1)$ (б), $\log_{10}(L(t) + 1)$ (в), $\log_{10}(I(t) + 1)$ (д), $\log_{10}(V(t) + 1)$ (е), $\log_{10}(W(t) + 1)$ (ф).

распределениями первоначально существующих индивидуумов по отдельным когортам, тогда как остальные параметры модели фиксированы.

Обозначим через $\check{S}_{k,n}(0) = \sum_{\alpha \in J_3} S_{k,n,\alpha}(0)$ начальную численность индивидуумов S фиксированной возрастной группы k с фиксированным уровнем контактности n .

Эксперимент 2. Во втором эксперименте полагаем, что $\check{S}_{k,1}(0)$ составляет 80 % от общей численности индивидуумов $\check{S}_k(0)$ возрастной группы k , а численности $\check{S}_{k,2}(0)$, $\check{S}_{k,3}(0)$ — по 10 % от $\check{S}_k(0)$. Внутри каждой группы $\check{S}_{k,n}(0)$ «равномерно» разделим индивидуумов S по уровню иммунитета, т.е. так, чтобы численность $S_{k,n,\alpha}(0)$ для каждого $\alpha = 1, 2, 3$, составляла треть от $\check{S}_{k,n}(0)$. В таблице 2 приведены начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 2. По сравнению с первым экспериментом здесь значительно увеличена численность индивидуумов S с низким уровнем контактности $n = 1$.

Таблица 2. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 2

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	26666	26666	26668	$n = 1$	53333	53333	53334	$n = 1$	66666	66666	66668
$n = 2$	3333	3333	3334	$n = 2$	6666	6666	6668	$n = 2$	8333	8333	8334
$n = 3$	3333	3333	3334	$n = 3$	6666	6666	6668	$n = 3$	8333	8333	8334
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	80000	80000	80000	$n = 1$	40000	40000	40000			
	$n = 2$	10000	10000	10000	$n = 2$	5000	5000	5000			
	$n = 3$	10000	10000	10000	$n = 3$	5000	5000	5000			

Эксперимент 3. Примем, что $\check{S}_{k,1}(0)$ составляет 60 % от общей численности индивидуумов $\check{S}_k(0)$ возрастной группы k , а численности $\check{S}_{k,2}(0)$, $\check{S}_{k,3}(0)$ — по 20 % от $\check{S}_k(0)$. По уровню иммунитета α при фиксированных k и n полагаем группы $S_{k,n,\alpha}(0)$ равночисленными, см. таблицу 3.

Таблица 3. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 3

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	20000	20000	20000	$n = 1$	40000	40000	40000	$n = 1$	50000	50000	50000
$n = 2$	6666	6666	6668	$n = 2$	13333	13333	13334	$n = 2$	16666	16666	16668
$n = 3$	6666	6666	6668	$n = 3$	13333	13333	13334	$n = 3$	16666	16666	16668
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	60000	60000	60000	$n = 1$	30000	30000	30000			
	$n = 2$	20000	20000	20000	$n = 2$	10000	10000	10000			
	$n = 3$	20000	20000	20000	$n = 3$	10000	10000	10000			

По сравнению с экспериментом 2 здесь увеличена начальная численность индивидуумов S со средним и высоким уровнем контактности $n = 2, 3$.

Эксперимент 4. В данном эксперименте численности $\check{S}_{k,n}(0)$ совпадают с соответствующими численностями из эксперимента 3, но значительно увеличено количество индивидуумов с высоким уровнем иммунитета $S_{k,n,3}$ при фиксированных k, n . Полагаем, что внутри группы $\check{S}_{k,n}(0)$ численности $S_{k,n,1}(0)$, $S_{k,n,2}(0)$ составляют по 5 % от количества индивидуумов $\check{S}_{k,n}(0)$, и численность $S_{k,n,3}$ равна 90 % от $\check{S}_{k,n}(0)$, см. таблицу 4.

Таблица 4. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 4

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	3000	3000	54000	$n = 1$	6000	6000	108000	$n = 1$	7500	7500	135000
$n = 2$	1000	1000	18000	$n = 2$	2000	2000	36000	$n = 2$	2500	2500	45000
$n = 3$	1000	1000	18000	$n = 3$	2000	2000	36000	$n = 3$	2500	2500	45000
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	9000	9000	162000	$n = 1$	4500	4500	81000			
	$n = 2$	3000	3000	54000	$n = 2$	1500	1500	27000			
	$n = 3$	3000	3000	54000	$n = 3$	1500	1500	27000			

Эксперимент 5. Принимаем, что численности $\check{S}_{k,1}(0)$, $\check{S}_{k,2}(0)$ составляют по 5 % от общей численности индивидуумов $\check{S}_k(0)$ возрастной группы k , а количество $\check{S}_{k,3}(0)$ — 90 % от $\check{S}_k(0)$. По уровню иммунитета α при фиксированных k и n полагаем группы $S_{k,n,\alpha}(0)$ равночисленными. В таблице 5 приведены начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 5. По сравнению с экспериментом 1 здесь значительно

Таблица 5. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 5

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	1666	1666	1668	$n = 1$	3333	3333	3334	$n = 1$	4166	4166	4168
$n = 2$	1666	1666	1668	$n = 2$	3333	3333	3334	$n = 2$	4166	4166	4168
$n = 3$	30000	30000	30000	$n = 3$	60000	60000	60000	$n = 3$	75000	75000	75000
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	5000	5000	5000	$n = 1$	2500	2500	2500			
	$n = 2$	5000	5000	5000	$n = 2$	2500	2500	2500			
	$n = 3$	90000	90000	90000	$n = 3$	45000	45000	45000			

увеличена численность индивидуумов S с высоким уровнем контактности $n = 3$.

Эксперимент 6. В этом эксперименте начальные численности $\check{S}_{k,n}(0)$ совпадают с численностями из эксперимента 5, но увеличена численность индивидуумов с высоким уровнем иммунитета $S_{k,n,3}$. Полагаем, что внутри группы $\check{S}_{k,n}(0)$ численности $S_{k,n,1}(0)$, $S_{k,n,2}(0)$ составляют по 10 % от количества индивидуумов $\check{S}_{k,n}(0)$, а численность $S_{k,n,3}$ равна 80 % от $\check{S}_{k,n}(0)$, см. таблицу 6.

Таблица 6. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 6

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	500	500	4000	$n = 1$	1000	1000	8000	$n = 1$	1250	1250	10000
$n = 2$	500	500	4000	$n = 2$	1000	1000	8000	$n = 2$	1250	1250	10000
$n = 3$	9000	9000	72000	$n = 3$	18000	18000	144000	$n = 3$	22500	22500	180000
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	1500	1500	12000	$n = 1$	750	750	6000			
	$n = 2$	1500	1500	12000	$n = 2$	750	750	6000			
	$n = 3$	27000	27000	216000	$n = 3$	13500	13500	108000			

Далее обозначим через $\hat{S}_{k,\alpha}(0) = \sum_{n \in J_3} S_{k,n,\alpha}(0)$ начальную численность индивидуумов S фиксированной возрастной группы k с фиксированным уровнем иммунитета α .

В представленных ниже экспериментах 7–10 для $k = 1, 5$, численности групп $S_{k,n,\alpha}(0)$, $n, \alpha \in J_3$ задаются также, как в эксперименте 1.

Эксперимент 7. Предполагаем, что для возрастных групп с номерами $k = 2, 3, 4$, численность $\hat{S}_{k,1}(0)$ равна 70 % от общей численности $\tilde{S}_k(0)$, а численности индивидуумов $\hat{S}_{k,2}(0), \hat{S}_{k,3}(0)$ составляют 20 % и 10 % от $\tilde{S}_k(0)$ соответственно. Внутри каждой группы $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$ полагаем, что численность $S_{k,n,\alpha}(0)$ для каждого $n = 1, 2, 3$, составляет треть от $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$. В таблице 7 приведены начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 7.

Таблица 7. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 7

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	11111	11111	11111	$n = 1$	46666	13333	6666	$n = 1$	58333	16666	8333
$n = 2$	11111	11111	11111	$n = 2$	46666	13333	6666	$n = 2$	58333	16666	8333
$n = 3$	11111	11111	11112	$n = 3$	46668	13334	6668	$n = 3$	58334	16668	8334
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	70000	20000	10000	$n = 1$	16666	16666	16666			
	$n = 2$	70000	20000	10000	$n = 2$	16666	16666	16666			
	$n = 3$	70000	20000	10000	$n = 3$	16666	16666	16672			

Эксперимент 8. В отличие от эксперимента 7 здесь значительно увеличено количество индивидуумов с высоким уровнем иммунитета $\alpha = 3$. Полагаем, что для $k = 2, 3, 4$, численности $\hat{S}_{k,1}(0), \hat{S}_{k,2}(0)$ равны 10 % от общей численности $\tilde{S}_k(0)$, а численность индивидуумов с высоким уровнем иммунитета $\alpha = 3$ составляет 80 % от $\tilde{S}_k(0)$. При фиксированных k и α численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ задаются аналогично эксперименту 7, см. таблицу 8.

Таблица 8. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 8

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
$n = 1$	11111	11111	11111	$n = 1$	6666	6666	53333	$n = 1$	8333	8333	66666
$n = 2$	11111	11111	11111	$n = 2$	6666	6666	53333	$n = 2$	8333	8333	66666
$n = 3$	11111	11111	11112	$n = 3$	6668	6668	53334	$n = 3$	8334	8334	66668
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$			
	$n = 1$	10000	10000	80000	$n = 1$	16666	16666	16666			
	$n = 2$	10000	10000	80000	$n = 2$	16666	16666	16666			
	$n = 3$	10000	10000	80000	$n = 3$	16666	16666	16672			

Эксперимент 9. В данном эксперименте численности $\hat{S}_{k,\alpha}(0), k = 2, 3, 4$, совпадают с соответствующими численностями из эксперимента 8, но значительно увеличено количество индивидуумов с высоким уровнем контактности $S_{k,3,\alpha}$ при фиксированных k, α . Полагаем, что внутри группы $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$ численности $S_{k,1,\alpha}(0), S_{k,2,\alpha}(0)$ составляют по 5 % от количества индивидуумов $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$, и численность $S_{k,3,\alpha}$ равна 90 % от $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$. В таблице 9 приведены начальные численности $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 9.

Эксперимент 10. В заключительном эксперименте количество индивидуумов с высоким уровнем иммунитета еще более увеличено в сравнении с экспериментами 8, 9, и составляет 5 % для $\hat{S}_{k,1}(0), \hat{S}_{k,2}(0)$ и 90 % для $\hat{S}_{k,3}(0)$ от $\tilde{S}_k(0)$. Число индивидуумов с высоким уровнем контактности $S_{k,3,\alpha}(0)$ внутри групп $\hat{S}_{k,\alpha}(0)$, напротив, снижено: 10 % для $S_{k,1,\alpha}(0), S_{k,2,\alpha}(0)$ и 80 % для $S_{k,3,\alpha}(0)$, см. таблицу 10.

В таблице 11 представлены интервальные оценки математического ожидания величины T_* — времени первого достижения переменной $V(t)$ порогового значения $V_* = 20000$ для каждого из экспериментов 1–10 (символ « \longleftrightarrow » означает, что за промежуток моделирования $[0; 120]$ суток пороговое значение V_* не достигается). Из таблицы 11

Таблица 9. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 9

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	
$n = 1$	11111	11111	11111	$n = 1$	1000	1000	8000	$n = 1$	1250	1250	10000	
$n = 2$	11111	11111	11111	$n = 2$	1000	1000	8000	$n = 2$	1250	1250	10000	
$n = 3$	11111	11111	11112	$n = 3$	18000	18000	144000	$n = 3$	22500	22500	180000	
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$				
	$n = 1$	1500	1500	12000	$n = 1$	16666	16666	16666				
	$n = 2$	1500	1500	12000	$n = 2$	16666	16666	16666				
	$n = 3$	27000	27000	216000	$n = 3$	16666	16666	16672				

Таблица 10. Начальная численность когорт $S_{k,n,\alpha}(0)$ для эксперимента 10

$k = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 3$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	
$n = 1$	11111	11111	11111	$n = 1$	1000	1000	18000	$n = 1$	1250	1250	22500	
$n = 2$	11111	11111	11111	$n = 2$	1000	1000	18000	$n = 2$	1250	1250	22500	
$n = 3$	11111	11111	11112	$n = 3$	8000	8000	144000	$n = 3$	10000	10000	180000	
	$k = 4$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$k = 5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$				
	$n = 1$	1500	1500	27000	$n = 1$	16666	16666	16666				
	$n = 2$	1500	1500	27000	$n = 2$	16666	16666	16666				
	$n = 3$	12000	12000	216000	$n = 3$	16666	16666	16672				

видно, что для экспериментов 2, 3, 4 пороговое значение V_* не достигается за указанный промежуток времени. Для экспериментов 6 и 9 доверительные интервалы для ET_* перекрываются, поэтому можно принять, что для этих экспериментов ET_* совпадают.

Таблица 11. Интервальные оценки ET_* на уровне доверия 0.95

Эксперимент	1	2	3	4	5
ET_* , сутки	79.6 ± 0.55	—	—	—	50.84 ± 0.33
Эксперимент	6	7	8	9	10
ET_* , сутки	55.91 ± 0.44	72.7 ± 0.58	88.62 ± 0.87	56.26 ± 0.38	61 ± 0.43

Для любой пары вычислительных экспериментов (кроме пар, в которые входят эксперименты 2, 3, 4, а также эксперименты 6 и 9) доверительные интервалы для ET_* не перекрываются. Этот результат свидетельствует о том, что приведенные выше распределения когорт индивидуумов $S_{k,n,\alpha}$ оказывают статистически значимое влияние на значения ET_* . Вместе с тем, результаты экспериментов 1, 7, 8 указывают на различия между ET_* всего лишь в пределах нескольких суток. Различия между ET_* для экспериментов 1, 7, 8 по сравнению с экспериментами 6, 9 находятся в пределах от 16 до 33 суток.

Обозначим через $\bar{V}(t)$ точечную оценку математического ожидания $EV(t)$. На рисунке 3 приведена динамика переменной $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ для экспериментов 1–10, где цифры означают номера экспериментов, а пунктирной линией обозначено значение $\log_{10}(V_* + 1)$.

Динамика переменной $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ для экспериментов 2, 3, 4 объясняется относительно небольшим количеством индивидуумов супер-распространителей среди первоначально существующих индивидуумов когорт $S_{k,n,\alpha}$. Различия между результатами экспериментов 3 и 4 объясняются тем, что в эксперименте 4 имеется многочисленная когорта индивидуумов с высоким уровнем иммунитета ($\alpha = 3$). Для

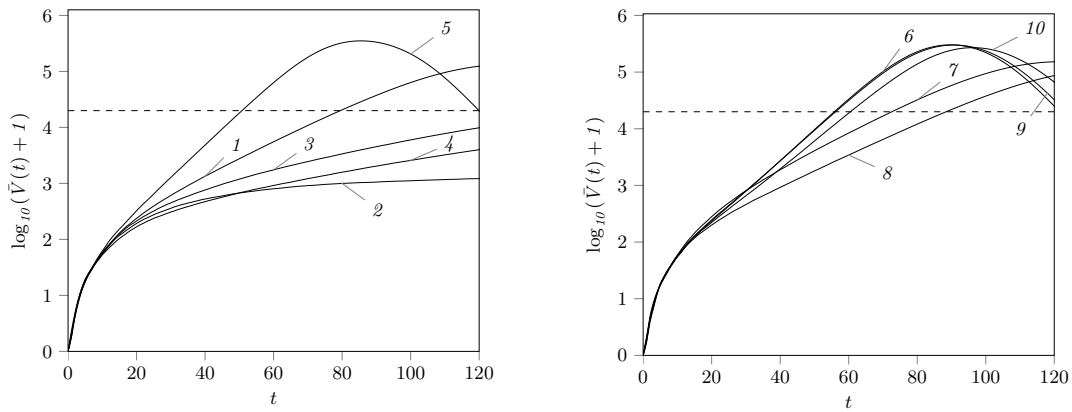


Рис. 3. Динамика $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ в экспериментах 1–10.

экспериментов 5, 6, 9, 10 динамика переменной $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ обусловлена достаточно большим количеством индивидуумов супер-распространителей среди первоначально существующих индивидуумов когорт $S_{k,n,\alpha}$ при $n = 3$ и $\alpha = 3$ (высокий уровень контактности и высокий уровень иммунитета). Для эксперимента 1 численность индивидуумов супер-распространителей среди первоначально существующих индивидуумов представлена равными долями среди $S_{k,n,\alpha}$ для $n = 1, 2, 3$, что приводит к «сдвигу вправо» графика с цифрой 1 по отношению к графикам с цифрами 5, 6, 9, 10. Динамика переменной $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ для экспериментов 7, 8 качественно похожа на динамику этой переменной в эксперименте 1. Различия в динамике $\log_{10}(\bar{V}(t) + 1)$ для экспериментов 7, 8 и 1 объясняются большей численностью индивидуумов когорт $S_{k,n,\alpha}$ при $\alpha = 1$ (эксперимент 7) и при $\alpha = 3$ (эксперимент 8).

Приведенные результаты говорят о том, что на начальном этапе распространения новой для популяции респираторной инфекции основную роль играет относительно малый или большой процент первоначально существующих восприимчивых индивидуумов с высоким уровнем контактности, а имеющийся уровень иммунитета указанных индивидуумов не приводит к существенному изменению закономерностей динамики распространения инфекции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена стохастическая стадия-зависимая модель распространения инфекции среди населения некоторого региона, структурированного по иммунологическим, клиническим, эпидемиологическим и демографическим критериям. Приведенная модель сочетает популяционный и индивидуум-ориентированный подход за счет использования параметрического описания индивидуумов, включая уникальные типы индивидуумов для когорт $L_{k,n,\alpha,\eta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $V_{k,n,\alpha,\varphi}$. Введение в модель уникальных типов индивидуумов позволило построить рекуррентные соотношения для изучения динамики численности когорт $S_{k,n,\alpha}$, $U_{k,n,\gamma}$, $W_{k,n,\gamma}$ и когорт $L_{k,n,\alpha,\eta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ с учетом предыстории появления индивидуумов в этих когортах. Отметим, что в рамках приведенного подхода продолжительности пребывания индивидуумов в когортах $L_{k,n,\alpha,\eta}$, $I_{k,n,\alpha,\theta,\varphi}$, $V_{k,n,\alpha,\varphi}$ заданы в виде некоторых констант. Поскольку распределения указанных продолжительностей отличны от экспоненциального, то это не дает возможности построения модели в форме марковского случайного процесса, ориентированного на использование только численности различных когорт. Представленный в работе подход позволяет перейти к марковскому случайному процессу в расширенном пространстве состояний, включающем описание когорт индивидуумов с помощью целочисленных

и вещественных переменных. Такой подход к моделированию динамики популяций был предложен в работах [24]–[28] и развит в настоящей статье применительно к моделированию динамики эпидемического процесса.

Приведенный подход позволяет легко расширять модель с точки зрения введения новых факторов. Например, если учитывать снижение уровня иммунитета к новой респираторной инфекции у переболевших индивидуумов, то это можно легко описать за счет введения семейств уникальных типов для индивидуумов когорт $U_{k,n,\gamma}$ и $W_{k,n,\gamma}$. Продолжительность поддержания иммунитета к новой инфекции может описываться различными законами, но это не приводит к проблемам модификации в описании представленной модели и ее численной реализации. Если использовать модели в форме дифференциальных уравнений, то здесь понадобятся уравнения с постоянным или распределенным запаздыванием. Отметим, что численное решение дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием представляет собой серьезную проблему.

Результаты вычислительных экспериментов с моделью носят предварительный характер. Эти результаты иллюстрируют возможную динамику переменных модели в течение нескольких первых месяцев от начала развития эпидемического процесса. Приведенные вычисления говорят о том, что на темп распространения новой для популяции респираторной инфекции влияет в основном относительно большой или малый процент первоначально имеющихся индивидуумов с высоким уровнем контактности. В рамках фиксированных значений параметров модели показано, что возможные распределения уровня иммунитета первоначально существующих индивидуумов различных когорт не оказывают заметного влияния на распространение новой респираторной инфекции, хотя и вносят определенные изменения в динамику численности тех или иных когорт.

Одним из важных направлений в применении стохастической стадия-зависимой модели является планирование методов сбора и обработки реальных данных, направленных на исследования динамики распространения Ковид-19 инфекции. Обработка реальных данных в рамках модели может быть направлена на оценку параметров миграционных притоков индивидуумов, интенсивностей контактов индивидуумов с учетом неоднородности популяции, оценку численности различных когорт и распределений длительности заболевания различной тяжести. Особенность построенной модели проявляется в том, что основная часть ее параметров связана со спецификой протекания заболевания у инфицированного человека. Подбор и оценка значений таких параметров требует привлечения реальных клинических данных, результатов иммунологических исследований, а также результатов математического моделирования протекания Ковид-19 инфекции в организме инфицированного индивидуума. Наиболее перспективным подходом к моделированию протекания Ковид-19 инфекции в организме инфицированного индивидуума является применение математической модели противовирусного иммунного ответа, разработанной Г.И. Марчуком и Р.В. Петровым [33], [34]. На основе модели Марчука-Петрова могут быть получены оценки изменения параметров инфекционности зараженного индивидуума в ходе заболевания, оценки вариантов тяжести заболевания, оценки формирования уровня иммунитета к Ковид-19 инфекции и длительности сохранения иммунитета у переболевшего индивидуума.

Реалистичные оценки параметров стохастической стадия-зависимой модели могут быть использованы для решения задач прогнозирования динамики эпидемического процесса в условиях переменной скорости миграционного притока индивидуумов (приток эпизодический, импульсный, сезонный), карантина и вакцинации населения, повторного инфицирования переболевших или инфицированных индивидуумов, включая

инфицирование за счет новых штаммов вирусов.

Авторы благодарят А.Н. Лукашева (Сеченовский университет) за предложения по структуре переменных модели и плану проведения вычислительных экспериментов с целью сравнения вариантов А и Б передачи инфекции между индивидуумами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-04-60157.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Daley D.J., Gani J. *Epidemic Modelling: An Introduction*. Cambridge Studies in Mathematical Biology 15. Cambridge University press, 1999. 213 p.
2. Андерсон Р., Мэй Р. *Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль*. М.: Мир, 2004. 784 с.
3. Grenfell B.T., Bjornstad O.N., Finkenstadt B.F. Dynamics of measles epidemics: scaling noise, determinism and predictability with the TSIR model. *Ecological Monographs*. 2002. V. 72. No. 2. P. 185–202.
4. Akhtar S., Carpenter T.E., Rathi S.K. A chain–binomial model for intra–household spread of *Mycobacterium tuberculosis* in a low socio–economic setting in Pakistan. *Epidemiol Infect.* 2007. V. 135. No. 1. P. 27–33. doi: [10.1017/s0950268806006364](https://doi.org/10.1017/s0950268806006364)
5. Мاستихин А.В. Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани. *Математические заметки*. 2007. Т. 82. № 6. С. 873–884. doi: [10.1134/S0001434607110223](https://doi.org/10.1134/S0001434607110223)
6. Sloot P.M.A., Ivanov S.V., Boukhanovsky A.V., D.A.M.C. Van De Vijver, Boucher C.A.B. Stochastic simulation of HIV population dynamics through complex network modeling. *International Journal of Computer Mathematics*. 2008. V. 85. No. 8. P. 1175–1187. doi: [10.1080/00207160701750583](https://doi.org/10.1080/00207160701750583)
7. Pertsev N.V., Leonenko V.N. Stochastic individual-based model of spread of tuberculosis. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2009. V. 24. No. 4. P. 341–360. doi: [10.1515/RJNAMM.2009.021](https://doi.org/10.1515/RJNAMM.2009.021)
8. Nishiura H. Real–time forecasting of an epidemic using a discrete time stochastic model: a case study of pandemic influenza (H1N1–2009). *Biomed. Eng. Online*. 2011. V. 10. No. 15. doi: [10.1186/1475-925X-10-15](https://doi.org/10.1186/1475-925X-10-15)
9. Yuan Y., Belair J. Threshold dynamics in an SEIRS model with latency and temporary immunity. *J. Math. Biol.* 2014. V. 69. P. 875–904. doi: [10.1007/s00285-013-0720-4](https://doi.org/10.1007/s00285-013-0720-4)
10. Влад А.И., Санникова Т.Е., Романюха А.А. Моделирование распространения респираторных вирусных инфекций в городе: мультиагентный подход. *Математическая биология и биоинформатика*. 2020. Т. 15. № 2. С. 338–356. doi: [10.17537/2020.15.338](https://doi.org/10.17537/2020.15.338)
11. Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Зятков Н.Ю., Приходько А., Прохошин Н., Шишленин М.А. Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2020. № 4. С. 395–414. doi: [10.15372/SJNM20200404](https://doi.org/10.15372/SJNM20200404)
12. Maleki M., Mahmoudi M.R., Heydari M.H., Kim-Hung Pho. Modeling and forecasting the spread and death rate of coronavirus (COVID-19) in the world using time series models. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. V. 140. P. 110151. doi: [10.1016/j.chaos.2020.110151](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110151)
13. Das R.C. Forecasting incidences of COVID-19 using Box-Jenkins method for the period July 12–September 11, 2020: A study on highly affected countries. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. V. 140. P. 110248. doi: [10.1016/j.chaos.2020.110248](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110248)

14. Feroze N. Forecasting the patterns of COVID-19 and causal impacts of lockdown in top five affected countries using Bayesian Structural Time Series Models. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. V. 140. P. 110196. doi: [10.1016/j.chaos.2020.110196](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110196)
15. Fu X., Ying Q., Zeng T., Long T., Wang Y. Simulating and forecasting the cumulative confirmed cases of SARS-CoV-2 in China by Boltzmann function-based regression analyses. *Journal of Infection*. 2020. V. 80. P. 602–605. doi: [10.1101/2020.02.16.20023564](https://doi.org/10.1101/2020.02.16.20023564)
16. Kucharski A., Russell T., Diamond C., Liu Y., Edmunds J., Funk S., Eggo R.M. Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study. *Lancet Infect Dis*. 2020. V. 20. P. 553–558. doi: [10.1016/S1473-3099\(20\)30144-4](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30144-4)
17. Nguemdjo U., Meno F., Dongfack A., Ventelou B. Simulating the progression of the COVID-19 disease in Cameroon using SIR models. *PLoS ONE*. 2020. V. 15. No. 8. Article No. e0237832. doi: [10.1371/journal.pone.0237832](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0237832)
18. Zaplotnik Z., Gavric A., Medic L. Simulation of the COVID-19 epidemic on the social network of Slovenia: Estimating the intrinsic forecast uncertainty. *PLoS ONE*. 2020. V. 15. No. 8. Article No. e0238090. doi: [10.1371/journal.pone.0238090](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0238090)
19. Atangana A., Araz S.I. Mathematical model of COVID-19 spread in Turkey and South Africa: Theory, methods and application. *Advances in Difference Equations*. 2020. V. 2020. No. 1. P. 1–89. doi: [10.1186/s13662-020-03095-w](https://doi.org/10.1186/s13662-020-03095-w)
20. Левашкин С.П., Агапов С.Н., Захарова О.И., Иванов К.Н., Кузьмина Е.С., Соколовский В.А., Монасова А.С., Воробьев А.В., Апешин Д.Н. Исследование адаптивно-компаратментной модели распространения КОВИД-19 в некоторых регионах РФ методами оптимизации. *Математическая биология и биоинформатика*. 2021. Т. 16. № 1. С. 136–151. doi: [10.17537/2021.16.136](https://doi.org/10.17537/2021.16.136)
21. Винницкий С.И., Гусев А.А., Дербов В.Л., Красовицкий П.М., Пеньков Ф.М., Чулуунбаатар Г. Редуцированная модель SIR пандемии COVID-19. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021. Т. 61. № 3. С. 400–412. doi: [10.31857/S0044466921030169](https://doi.org/10.31857/S0044466921030169)
22. Abidemi A., Zainuddin Z.M., Aziz N.A.B. Impact of control interventions on COVID-19 population dynamics in Malaysia: a mathematical study. *Eur. Phys. J. Plus*. 2021. V. 136. No. 237. doi: [10.1140/epjp/s13360-021-01205-5](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01205-5)
23. Kavitha C., Gowrisankar A., Banerjee S. The second and third waves in India: when will the pandemic be culminated? *Eur. Phys. J. Plus*. 2021. V. 136, No. 596. doi: [10.1140/epjp/s13360-021-01586-7](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01586-7)
24. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю. Применение метода Монте-Карло для моделирования динамики сообществ взаимодействующих индивидуумов. *Вестник воронежского государственного технического университета*. 2006. Т. 2. № 5. С. 70–76.
25. Pertsev N.V., Pichugin B.J. An individual-based stochastic model of the spread of tuberculosis. *J. Appl. Ind. Math*. 2010. V. 4. No. 3. P. 359–370. doi: [10.1134/S1990478910030087](https://doi.org/10.1134/S1990478910030087)
26. Leonenko V.N., Pertsev N.V., Artzrouni M. Using high performance algorithms for the hybrid simulation of disease dynamics on CPU and GPU. *Procedia Computer Science*. 2015. V. 51. P. 150–159. doi: [10.1016/j.procs.2015.05.214](https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.05.214)
27. Pichugin B.J., Pertsev N.V., Topchii V.A., Loginov K.K. Stochastic modeling of age-structured population with time and size dependence of immigration rate. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2018. V. 33. No. 5. P. 289–299. doi: [10.1515/RNAM-2018-0024](https://doi.org/10.1515/RNAM-2018-0024)
28. Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А. Анализ стадия-зависимой модели эпидемии, построенной на основе немарковского случайного процесса. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2020. Т. 23. № 3. С. 105–122. doi: [10.33048/SIBJIM.2020.23.309](https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.309)

29. Marchenko M.A., Mikhailov G.A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2002. V. 17. P. 113–124. doi: [10.1515/rnam-2002-0107](https://doi.org/10.1515/rnam-2002-0107)
30. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. *Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло*. М.: Академия, 2006. 368 с.
31. Marchenko M. PARMONC – A Software Library for Massively Parallel Stochastic Simulation. In: *Parallel Computing Technologies. PaCT 2011. Lecture Notes in Computer Science*. Ed. Malyskin V.: Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. V. 6873. P. 302–316. doi: [10.1007/978-3-642-23178-0_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23178-0_27)
32. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир, 1975. 648 с.
33. Марчук Г.И. *Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты*. М.: Наука, 1991. 300 с.
34. Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A. *Mathematical Immunology of Virus Infections*. Cham: Springer, 2018. 245 p. doi: [10.1007/978-3-319-72317-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-72317-4)

Рукопись поступила в редакцию 14.05.2021.

Переработанный вариант поступил 05.07.2021.

Дата опубликования 07.07.2021.

Direct Statistical Modeling of Spread of Epidemic Based On a Stage-Dependent Stochastic Model

Loginov K., Pertsev N.

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia*

Abstract. A stochastic stage-dependent model of spread of an epidemic in a certain region is presented. The model is written in the form of a continuous-discrete random process that takes into account the passage of individuals through various stages of an infectious disease. Within the framework of the model, the population of the region is represented in the form of cohorts of individuals, structured according to immunological, clinical, epidemiological and demographic criteria. All cohorts make up two blocks. Individuals belonging to the cohorts of the first block are considered indistinguishable within a fixed cohort and have the same type of parametric description. Individuals belonging to the cohorts of the second block differ from each other by the time of admission to a particular cohort and by the time of stay in this cohort. An algorithm for statistical modeling of the dynamics of cohorts of individuals based on the Monte Carlo method is developed. A numerical study of the dynamics of cohorts of individuals was conducted for sets of parameters reflecting different variants of transmission of infection between individuals.

Key words: *epidemic spread, stochastic stage-dependent model, continuous-discrete random process, Monte Carlo method, transmission of infection between individuals, Covid-19 infection.*