

Построение сложных трехмерных структур аорты конкретного пациента с помощью конечных аналитических формул

Медведев А.Е.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия
Национальный медицинский исследовательский центр имени академика
Е.Н. Мешалкина, Новосибирск, Россия*

Аннотация. Разработана методика построения геометрии морфологически реалистичной аорты человека, включая корень аорты (синусы Вальсальвы), грудную аорту, дугу аорты с ответвлениями, брюшную аорту с бифуркацией сосудов. Особенностью методики является простота построения аорты индивидуального пациента. Полученная трехмерная модель аорты полностью готова для 3D моделирования и печати на 3D принтере.

Ключевые слова: аорта, дуга аорты синус Вальсальвы, математическое моделирование, бифуркация аорты, аневризма.

ВВЕДЕНИЕ

Современная клиническая практика лечения сердечно-сосудистых заболеваний основана на имплантации малоинвазивных гибридных протезов и стент-графтов [1]. Для повышения эффективности лечения это требует постоянного технологического совершенствования методов планирования операции. Для этого в первую очередь необходимо предоставить врачам трехмерную модель сосуда с индивидуальными патологическими изменениями сосудов пациента. Конечной целью настоящего исследования является создание методики быстрого построения индивидуальной трехмерной модели аорты человека на основе ключевых характеристик патологий конкретного пациента.

Существующие инструменты построения трехмерной модели аорты (или её отдельного участка) основаны на обработке МРТ или КТ изображений. Обработка этих изображений требуют больших затрат времени хирурга и дают неудовлетворительный результат. При этом множество несущественных деталей затрудняют выделение основных патологий аорты. Модели аорты на основе восстановления из МРТ-образов требуют существенной постобработки для 3D печати моделей аорты. Часто сосудистым хирургам необходимо выделение того или иного участка аорты и особенности патологий (размер аневризмы и т.д.), остальные участки аорты для них уже несущественны.

Распространёнными патологиями аорты являются аневризмы (расширение) и стенозы (сужение) аорты. Смертность пациентов с разрывом аневризмы брюшной аорты составляет 65–85 % [2]. Разрабатываются многочисленные численные методы для моделирования патологий аорты [3]. Численное моделирование аневризмы аорты обычно начинается с построения геометрической модели аневризмы. Часто берутся простейшая симметричная [4] или несимметричная [5] модели аневризмы. Но даже для таких геометрически простых моделей аневризмы приводятся только схемы аневризмы без указания конкретных размеров и формул построения геометрии аневризмы. Для численного расчета реальных аневризм и стеноза аорты используются трехмерные

модели аорты, восстановленные по МРТ или КТ данным конкретного пациента [4, 6, 7]. Восстановить геометрию аорты по этим публикациям практически невозможно. Редким исключением является работа [8], где приведены формулы и размеры для построения симметричного стеноза брюшной аорты.

Существует методика изо-геометрического построения сложной геометрии аорты на основе неоднородных рациональных В-сплайнов (NURBS) [9, 10]. Эта методика требует предварительной обработки данных визуализации аорты. Далее извлекается сосудистый скелет, проводится его сегментация на отдельные участки, для которых строится управляющая сетка (контрольные точки) и на их основе В-сплайны. Сегментированные участки приходится состыковывать друг с другом. В результате получается гладкая модель аорты в терминах В-сплайнов. Как указано в работе [9] для получения NURBS-модели брюшной аорты необходима сегментация аорты на 26 участков. Процедура построения состоит из пяти этапов (к ним необходимо добавить четыре этапа предварительной обработки результатов визуализации аорты пациента) построения В-сплайнов. Результат построения модели аорты получается превосходный, но для его получения требуется много ручной обработки модели.

Предлагаемая методика построения трехмерной модели основана на делении аорты на несколько участков, для каждого из которых задается несколько параметров – тип участка (бифуркация аорты или одиночная ветвь), входной и выходной диаметры, угол изгиба, угол поворота. Для участка аневризмы или стеноза дополнительно аналитически задается форма патологии со своими параметрами – длина и величина патологии и её угловой размер. Полученная модель аорты (участка аорты) полностью готова для 3D печати без дополнительной постобработки. Модель описывает особенности патологии конкретного больного и полностью готова для предоперационного анализа.

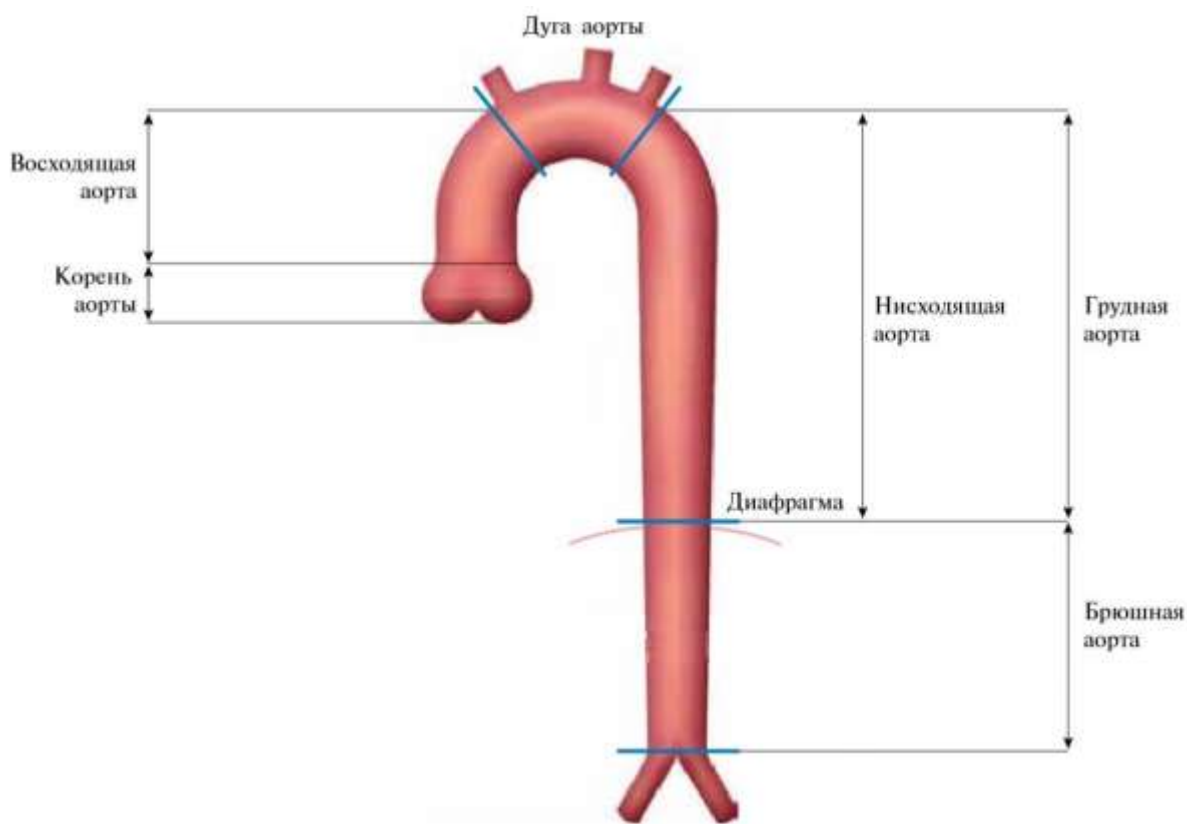


Рис. 1. Схема сегментов аорты.

СЕГМЕНТЫ АОРТЫ

Аорта является основным кровеносным сосудом, по которому кровь поступает из левого желудочка сердца в организм человека. Через аорту перекачивается около 5 литров крови в минуту (почти 200 миллионов литров крови за жизнь). Схема сегментов аорты приведена на рисунке 1. У здоровых взрослых диаметр аорты обычно около 20 мм. Самыми распространенными патологическими изменениями аорты являются аневризмы (расширение более чем на 50 % от нормального диаметра просвета аорты) и расслоения грудной аорты.

Начальный отдел восходящей аорты (корень аорты) имеет три расширения – синусы аорты (синусы Вальсальвы). От дуги аорты отходят три артерии (подключичная и сонные артерии). Брюшная аорта заканчивается бифуркацией – разделением аорты на две артерии.

ПОСТРОЕНИЕ СИНУСОВ ВАЛЬСАЛЬВЫ

Математическое построение синусов Вальсальвы проводилось во многих работах, как часть, необходимая для моделирования работы аортального клапана [11–19]. В этих работах приводятся характерные размеры синусов, описание геометрии и алгоритм построения синусов и всего корня аорты. Но в этих работах нет математических формул для описания трехмерной геометрической модели корня аорты.

Построение синусов Вальсальвы опирается на приведенные в работе [11] измерения двух проекций корня аорты (рис. 2).

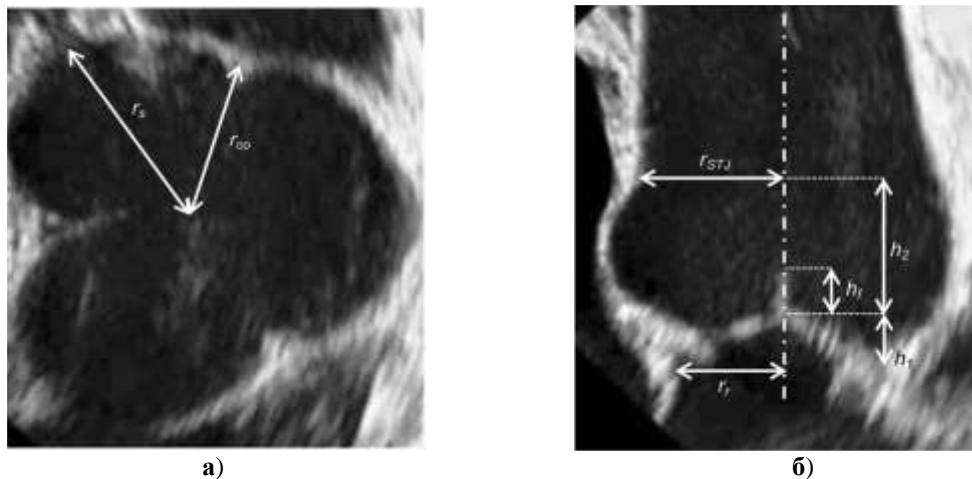


Рис. 2. Измерения корня аорты в плоскости $z = \text{const}$ (а) и в плоскости $y = \text{const}$ (б) по результатам измерений 3D-трансэзофагеальной эхокардиографии (3D-ТЭЕ) из работы [11].

Построение синусов Вальсальвы опирается на функцию

$$r_{0_sin}(\varphi; \alpha) = 0.5 \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{6\varphi - 3\alpha - \pi}{\pi - 3\alpha} \right) \right], \quad (1)$$

где φ – угол, значение параметра α находится в пределах $0 \leq \alpha < \frac{2}{3}\pi$. С помощью функции (1) строится сечение i -го ($i=1,2,3$) синуса Вальсальвы в плоскости $z = \text{const}$

$$r_{i_sin}(\varphi; \alpha, i) = \begin{cases} 0, & \text{если } (i-1) \cdot \frac{2}{3} \pi \leq \varphi < (i-1) \cdot \frac{2}{3} \pi + \alpha \\ r_{0_sin} \left(\varphi - (i-1) \cdot \frac{2}{3} \pi; \alpha \right), & \text{если } (i-1) \cdot \frac{2}{3} \pi + \alpha \leq \varphi < i \cdot \frac{2}{3} \pi - \alpha \\ 0, & \text{если } i \cdot \frac{2}{3} \pi - \alpha \leq \varphi < i \cdot \frac{2}{3} \pi \end{cases} \quad (2)$$

Из функций (1) и (2) конструируется сечение корня аорты в плоскости $z = \text{const}$, включающее все три синуса Вальсальвы

$$r_{y_sin}(\varphi; \alpha) = \begin{cases} r_{i_sin}(\varphi; \alpha, 1), & \text{если } 0 \leq \varphi < \frac{2}{3} \pi \\ r_{i_sin}(\varphi; \alpha, 2), & \text{если } \frac{2}{3} \pi \leq \varphi < \frac{4}{3} \pi \\ r_{i_sin}(\varphi; \alpha, 3), & \text{если } \frac{4}{3} \pi \leq \varphi < \frac{6}{3} \pi \end{cases} \quad (3)$$

Сечение корня аорты в плоскости $z = \text{const}$ задается функциями

$$\begin{aligned} S_{x_sin}(\varphi; r_{co}, r_s) &= [r_{co} + (r_s - r_{co}) r_{y_sin}(\varphi; \alpha)] \cos(\varphi) \\ S_{y_sin}(\varphi; r_{co}, r_s) &= [r_{co} + (r_s - r_{co}) r_{y_sin}(\varphi; \alpha)] \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

График сечения (4) показан на рисунке 3,а. Обозначение размеров в формулах (4) соответствуют обозначениям на рисунке 2 из работы [11].

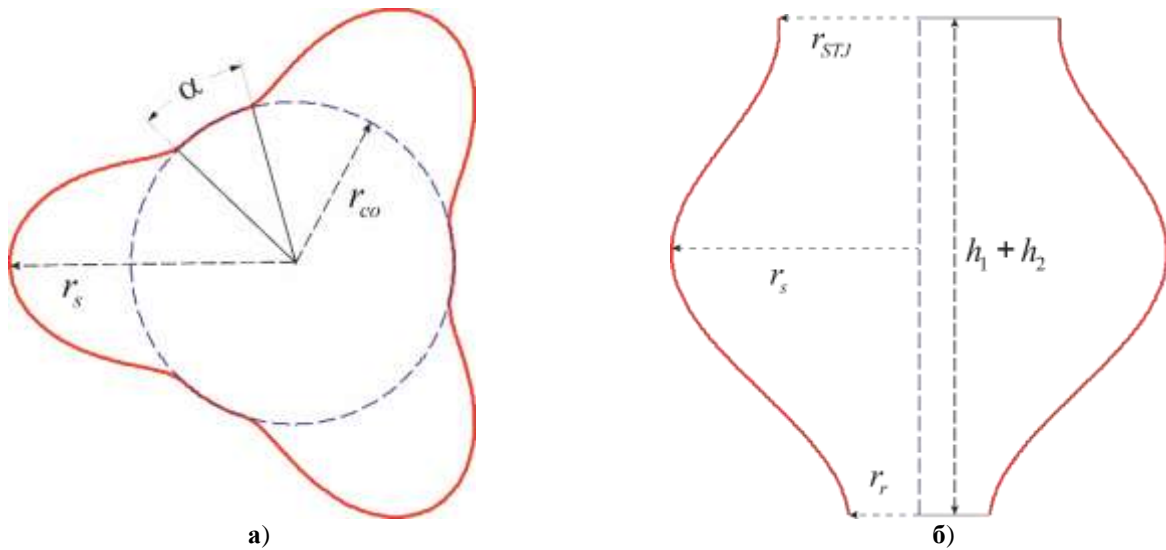


Рис. 3. Построенные сечения корня аорты в плоскости $z = \text{const}$ (а) и в плоскости $y = 0$ (б).

Построение сечения корня аорты в плоскости $y = \text{const}$ опирается на функции

$$z_{0_sin}(z; h_{1+2}) = 0.5 \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{4z}{h_{1+2}} - 1 \right) \right) \right], \quad z_l(z; h_{1+2}, r_r, r_{STJ}) = r_r + \frac{z}{h_{1+2}} (r_{STJ} - r_r), \quad (5)$$

где $h_{1+2} = h_1 + h_2$. Сечение корня аорты в плоскости $y = \text{const}$ задается функцией

$$z_{\sin}(z; h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) = \pm \left\{ z_l(z; h_{1+2}, r_r, r_{STJ}) + z_{0_sin}(z; h_{1+2}) \cdot \left[r_s - z_l \left(\frac{h_{1+2}}{2}; h_{1+2}, r_r, r_{STJ} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

График функции (6) показан на рисунке 3 (б).

Функции сечений (4) и (6) позволяют построить трехмерную модель корня аорты с синусами Вальсальвы как двухпараметрическую поверхность от переменных (φ, z)

$$W_{\sin}(\varphi, z; \alpha, h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) = z_l(z; h_{1+2}, r_r, r_{STJ}) + r_{y_sin}(\varphi; \alpha) \cdot z_{0_sin}(z; h_{1+2}) \cdot [r_s - z_l(z; h_{1+2}, r_r, r_{STJ})]. \quad (7)$$

Поверхность корня аорты с синусами Вальсальвы в трехмерном пространстве (x, y, z) задается тремя функциями

$$\begin{aligned} W_{x_sin}(\varphi, z; \alpha, h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) &= W_{\sin}(\varphi, z; \alpha, h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) \cdot \cos(\varphi), \\ W_{y_sin}(\varphi, z; \alpha, h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) &= W_{\sin}(\varphi, z; \alpha, h_{1+2}, r_r, r_s, r_{STJ}) \cdot \sin(\varphi), \\ W_{z_sin}(z) &= z, \end{aligned} \quad (8)$$

где переменные φ и z изменяются в пределах $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h_{1+2}]$. Значения параметров корня аорты и синусов Вальсальвы приведены в [11]: $r_r = 12$ мм, $r_s = 1.4r_r$, $h_{1+2} = 1.4r_r$, $r_{STL} = 1.1r_r$, $r_{co} = 0.5(r_{STJ} + r_s)$, $\alpha = 4^\circ$. Трехмерная модель корня аорты в пространстве (x, y, z) приведена на рисунке 4.

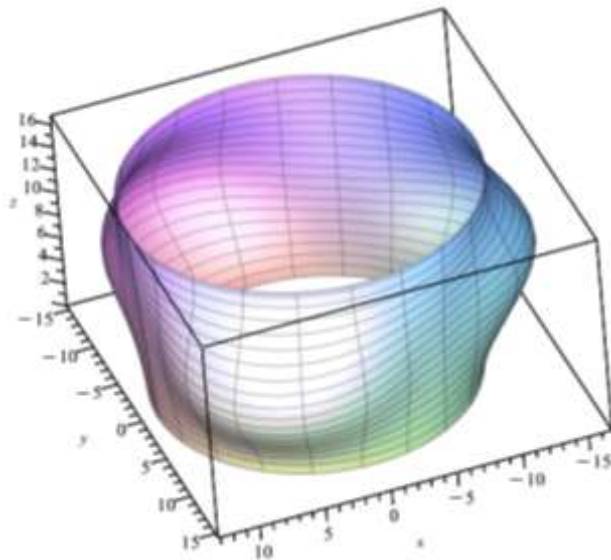


Рис. 4. Трехмерная модель корня аорты.

ПОСТРОЕНИЕ ОТВЕТВЛЕНИЙ АОРТЫ

От дуги аорты почти под прямым углом отходят три артерии (рис. 1). Ответвлений этих артерий можно моделировать как пересечения двух цилиндров. Такая задача часто встречается в технических приложениях. В работе [20] приведено параметрическое построение линии пересечения двух цилиндров. Построим формулы для описания построения двух пересекающихся цилиндров.

Построим уравнения, описывающие пересечение двух цилиндров. Схема пересечения и обозначения приведены на рисунке 5,а.

Уравнение линии пересечения цилиндров (однопараметрическая кривая в пространстве (x, y, z)) – красная кривая на рисунке 5,а)

$$\begin{aligned} R_{x_cross}(\varphi; R_b, Z_{centr}, \kappa) &= R_b \sqrt{1 - (\kappa \sin \varphi)^2} \\ R_{y_cross}(\varphi; R_b, Z_{centr}, \kappa) &= R_b \kappa \sin \varphi \\ R_{z_cross}(\varphi; R_b, Z_{centr}, \kappa) &= Z_{centr} - R_b \kappa \cos \varphi \end{aligned} \quad (9)$$

где $Z_{center} = Z_{b_in} + 0.5(Z_{b_out} - Z_{b_in})$ – середина большого цилиндра по оси z , $\kappa = R_s/R_b$ – отношение радиусов большого и малого цилиндров.

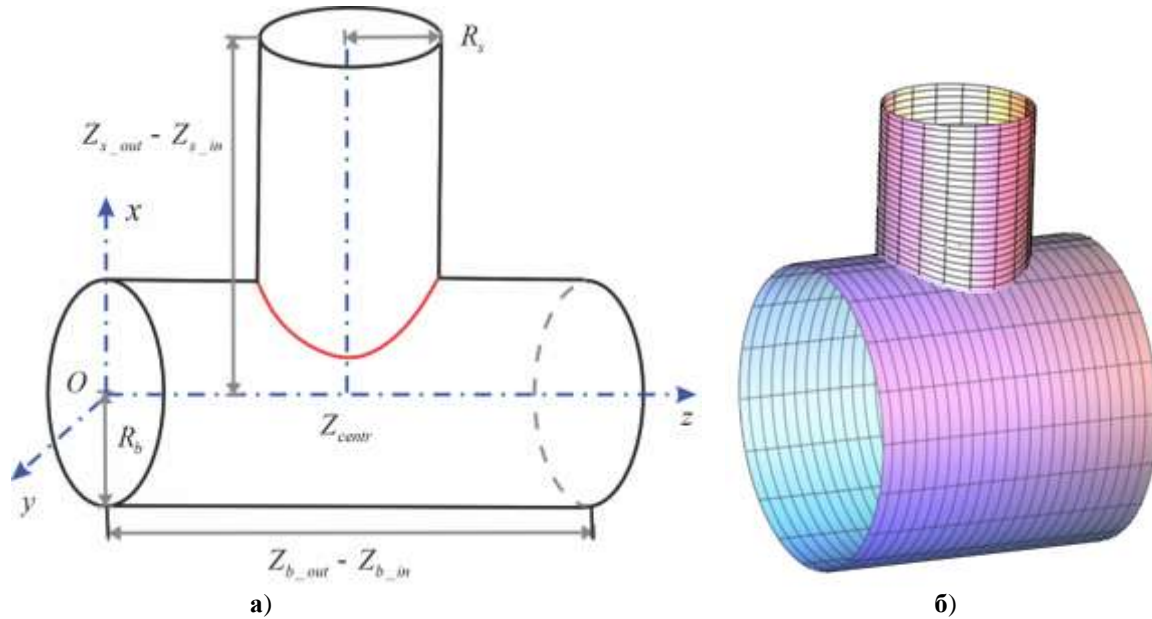


Рис. 5. Схема пересечения двух цилиндров (а). Красным цветом обозначена линия пересечения цилиндров (9). Трехмерная модель пересечения цилиндров (б).

Уравнение пересекающихся цилиндров:
– большого цилиндра

$$\begin{aligned} C_{x_b}(\varphi; R_b) &= R_b \cos \varphi \\ C_{y_b}(\varphi; R_b) &= R_b \sin \varphi \\ C_{z_b}(z) &= z \end{aligned} \quad (10)$$

где угол $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [z_{b_in}, z_{b_out}]$;

– малого цилиндра

$$\begin{aligned} C_{x_s}(z) &= z \\ C_{y_s}(\varphi; R_s) &= R_s \sin \varphi \\ C_{z_s}(\varphi; R_s, Z_{centr}) &= Z_{centr} - R_s \cos \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

где угол $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [R_{x_cross}(\varphi; R_b, Z_{centr}, \kappa), Z_{s_out}]$. Построенная трехмерная модель пересекающихся цилиндров показана на рисунке 5,б.

АНЕВРИЗМА И СТЕНОЗ АОРТЫ

Распространёнными патологиями аорты являются аневризмы (расширение) и стенозы (сужение) аорты. Приведем аналитические формулы для описания локального несимметричного сужения и расширения сосуда.

Построение уравнение сужения и расширения сосуда опирается на функции

$$r_{0_an}(s) = 0.5 \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} (2s - 1) \right) \right], \quad r_{an}(s) = \begin{cases} r_{0_an}(2s), & \text{если } s \leq 0.5 \\ r_{0_an}(2(1-s)), & \text{если } s > 0.5 \end{cases}. \quad (12)$$

Локальная единичная функция деформации дается функцией

$$R_{an}(s; s_{big}, s_{end}) = \begin{cases} 0, & \text{если } s < s_{big} \\ r_{an}(s), & \text{если } s_{big} \leq s < s_{end} \\ 0, & \text{если } s_{end} < s \end{cases}, \quad (13)$$

где s_{big} и s_{end} – точки начала и конца деформации ($s_{big} < s_{end}$).

Окончательная функция сужения или расширения по углу и длине сосуда дается формулой

$$F_{an}(\varphi, z; \varphi_{big}, \varphi_{end}, z_{big}, z_{end}, k_{an}, H_{an}) = 1 + k_{an} H_{an} R_{an}(\varphi; \varphi_{big}, \varphi_{end}) R_{an}(z; z_{big}, z_{end}), \quad (14)$$

где φ_{big} и φ_{end} – углы начала и конца деформации сосуда ($0 \leq \varphi_{big} < \varphi_{end} \leq 2\pi$), z_{big} и z_{end} – координаты по длине сосуда начала и конца деформации ($z_{big} < z_{end}$), k_{an} – параметр выбора расширения ($k_{an} = 1$) или сужения ($k_{an} = -1$) сосуда, $H_{an} \geq 0$ – величина деформации сосуда.

Уравнения цилиндра с расширением или сужением будет иметь вид

$$\begin{aligned} A_x(\varphi, z; \varphi_{big}, \varphi_{end}, z_{big}, z_{end}, k_{an}, H_{an}) &= C_x(\varphi; R) \cdot F_{an}(\varphi, z; \varphi_{big}, \varphi_{end}, z_{big}, z_{end}, k_{an}, H_{an}) \\ A_y(\varphi, z; \varphi_{big}, \varphi_{end}, z_{big}, z_{end}, k_{an}, H_{an}) &= C_y(\varphi; R) \cdot F_{an}(\varphi, z; \varphi_{big}, \varphi_{end}, z_{big}, z_{end}, k_{an}, H_{an}), \\ A_z(z) &= C_z(\varphi; R) \end{aligned} \quad (15)$$

где R – радиус цилиндра (10). Примеры построения трехмерных моделей аневризмы (а) и стеноза (б) сосуда.

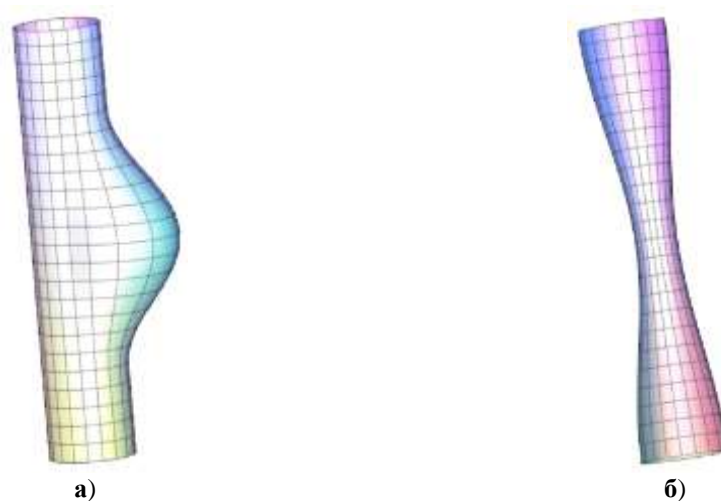


Рис. 6. Примеры построения трехмерных моделей аневризмы (а) и стеноза (б) сосуда.

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АОРТЫ

В работах [21, 22] разработана методика аналитического построения бронхиального дерева человека. Данную методику можно расширить для аналитического построения аорты человека.

Пример аналитического построения модели грудной аорты на основе восстановленного КТ-образа аорты показан на рисунке 7. При восстановлении КТ-образа аорты (рис. 7,а) появляются нежелательные артефакты, которые требуют дальнейшего сглаживания. Эта процедура достаточно трудоемка и не всегда дает удовлетворительный результат. Для другого пациента (для другого КТ-образа) процедуру сглаживания необходимо проводить повторно.

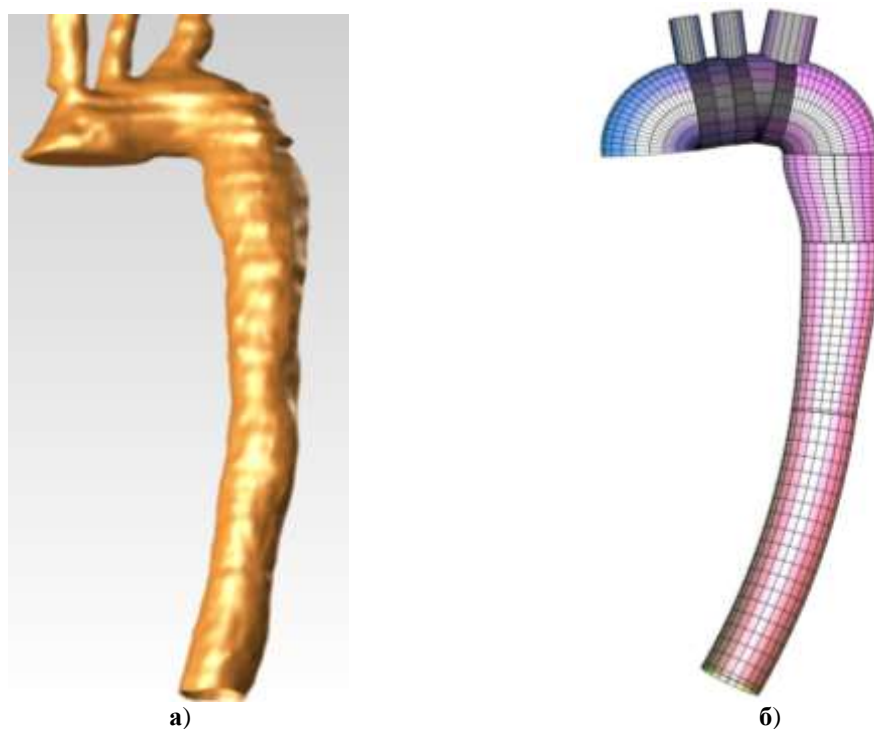


Рис. 7. Построение модели грудной аорты. (а) Модель грудной аорты, восстановленная по КТ-данным пациента. (б) Модель грудной аорты, построенная по аналитической модели.

В предлагаемой методике КТ-образ аорты разбивается на несколько базовых участков (в данном случае на 10 участков). Для каждого участка задается несколько параметров:

- 1) номер участка n ;
- 2) тип построения участка i : $i = 0$ – бифуркация (раздвоение) аорты (формулы для построения бифуркации сосудов приведены в [22]); $i = 1$ – только правая ветвь бифуркации; $i = -1$ – только левая ветвь бифуркации; $i = 2$ – цилиндрический участок аорты (формула (10)); $i = 3$ – ответвление аорты (формулы пересекающихся цилиндров (10), (11));
- 3) входной радиус участка аорты R_{in} ;
- 4) выходной радиус участка аорты (правый R_{out}^+ радиус и/или левой R_{out}^- радиус) – если выход участка один (нет бифуркации сосуда), то задается только один, например, правый R_{out}^+ радиус, если есть бифуркация, то задается и левый R_{out}^- выходной радиус ветви бифуркации);

5) выходной угол участка аорты (правый χ_{out}^+ угол и/или левой χ_{out}^- угол) – если выход участка один (нет бифуркации сосуда), то задается только один, например, правый χ_{out}^+ угол, если есть бифуркация, то задается и левый χ_{out}^- выходной угол ветви бифуркации);

б) угол σ_n поворота участка аорты вокруг локальной оси z . (формулы матрицы преобразования локальной системы координат приведены в [22]).

В таблице 1 приведены параметры для аналитического построения грудной аорты. Особенностью построенной модели аорты является состыковка гладкая состыковка участков аорты (непрерывность производной в месте стыка). Созданная модель аорты готова для численного моделирования и 3D печати. Созданная модель аорты полностью документирована, что позволяет ее воспроизведение другими авторами. Для подгонки модели аорты для другого пациента (для другого КТ-образа аорты) необходимо поменять несколько параметров в таблице участков аорты. Это значительно убыстряет и упрощает процесс подготовки модели аорты.

Таблица 1. Параметры построения грудной аорты

n	i	L_{out}^+ , мм	L_{out}^- , мм	R_{in} , мм	R_{out}^+ , мм	R_{out}^- , мм	χ_n^+ , град.	χ_n^- , град.	σ_n , град.	тип участка
0	1	170	–	15	15	–	85	–	0	дуга
1	3	–	–	15	–	4.5	–	–	0	ветвление
2	1	6	–	15	15	–	3	–	0	изгиб
3	3	–	–	15	–	4.5	–	–	0	ветвление
4	1	6	–	15	15	–	17	–	0	изгиб
5	3	–	–	15	–	7.5	–	–	0	ветвление
6	1	100	–	15	15	–	80	–	0	нисходящая
7	1	30	–	15	12	–	1	–	135	нисходящая
8	1	60	–	12	10	–	10	–	10	нисходящая
9	1	100	–	10	10	–	20	–	100	нисходящая

Примечание. Параметр L_{out}^\pm не является реальной длиной участка. Реальная длина участка по образующей линии пропорциональна параметру L_{out}^\pm и обратно пропорциональна углу χ_n^\pm . Эта зависимость приведена в [22].

На любой участок аорты можно наложить аневризму и/или стеноз. На рисунке 8 показано наложение стеноза и аневризмы на соседние участки аорты.

Приведем пример построения брюшной аорты (рис. 9). Параметрические данные для построения брюшной аорты приведены в таблице 2. Здесь участок 2 представляет из себя бифуркацию аорты. Участки 3^+ , 4^+ – правая ветвь бифуркации, а участки 3^- , 4^- – левая ветвь бифуркации аорты.

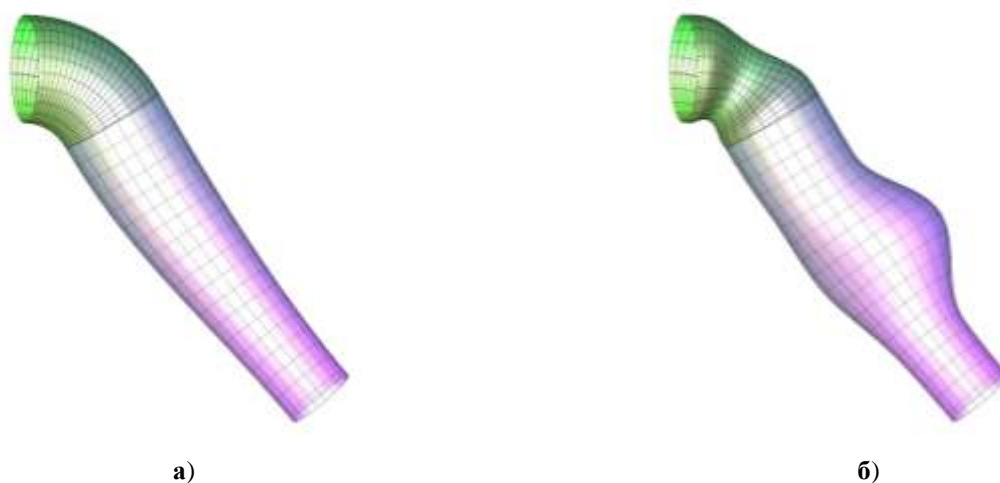


Рис. 8. Примеры построения стеноза и аневризмы участка грудной аорты. (а) Здоровая грудная аорта. (б) Грудная аорта со стенозом и аневризмой.

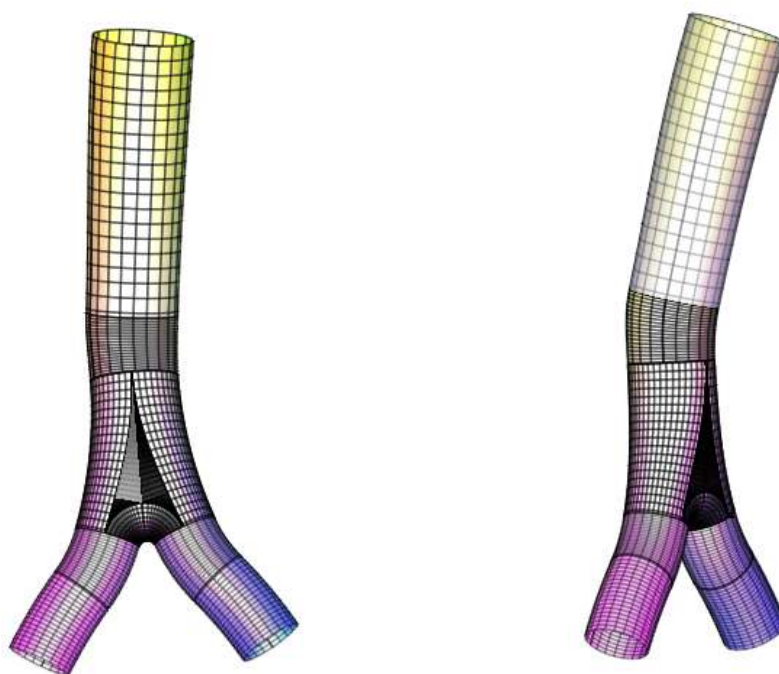


Рис. 9. Пример построения участка брюшной аорты.

Таблица 2. Параметры построения брюшной аорты

n	i	L_{out}^+ , мм	L_{out}^- , мм	R_{in} , мм	R_{out}^+ , мм	R_{out}^- , мм	χ_n^+ , град.	χ_n^- , град.	σ_n , град	Вид бифуркации
0	1	50	–	9	8.15	–	5	–	90	дуга
1	1	11.8	–	8.15	7.775	–	15	–	0	ветвление
2	0	31	–	7.775	5.84	5.84	20	20	–90	изгиб
3 ⁺	1	11	–	5.84	15	–	20	–	0	ветвление
3 ⁻	-1	–	11	5.84	15	–	–	20	0	ветвление
4 ⁺	1	15	–	5.84	15	–	-10	–	0	изгиб
4 ⁻	-1	–	15	5.84	15	–	–	-10	0	изгиб

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика построения геометрии морфологически реалистичной аорты человека, включая корень аорты (синусы Вальсальвы), грудную аорту, дугу аорты с ответвлениями, брюшную аорту с бифуркацией сосудов.

Создание трехмерной модели аорты человека необходимо при планировании хирургического вмешательства, при проведении численного моделирования течения крови в аорте. Анатомическое строения аорты отличается у различных пациентов, особенно при наличии различных патологий (аневризмы, стенозы, расслоение аорты). Создание индивидуальной модели аорты человека на основе МРТ, КТ образов требует трудоемкой ручной работы специалиста высокой компьютерной квалификации.

Представленная простая методика построения 3D модели аорты человека. Первоначально создается 3D модель аорты (или выбранного участка аорты) одного пациента. Для этого по необработанной модели аорты (пример такой аорты показан на рис. 7,а) строится аналитическая трехмерная модель этой аорты (рис. 7,б). Для построения такой аналитической аорты необходимо разбить аорту на характерные участки и задать определяющие параметры для каждого из участков (таблица 1). Для построения модели аорты другого пациента берется базовая модель и подправляется исходя из индивидуальных особенностей строения аорты больного (его необработанная модель аорты). При этом при необходимости добавляются участки патологий (стенозы и аневризмы). Исправления базовой модели требует значительно меньше времени и трудозатрат, чем создание модели с “нуля”.

Одной из ключевых особенностей методики является простота использования, исключая монотонный ручной труд построения аорты индивидуального пациента. Полученная трехмерная модель аорты полностью готова для 3D моделирования и печати на 3D принтере. Участки аорты состыковываются со вторым порядком гладкости (непрерывная вторая производная между участками построенной аорты).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-15-20005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернявский А.М., Ляшенко М.М., Таркова А.Р. Сирота Д.А., Хван Д.С., Кретов Е.И., Прохорихин А.А., Малаев Д.У., Бойков А.А. Обзор гибридных вмешательств при заболеваниях дуги аорты. *Хирургия. Журнал имени Н.И. Пирогов*. 2019. № 4. С. 87–93. doi: [10.17116/hirurgia201904187](https://doi.org/10.17116/hirurgia201904187)
2. Sakalihasan N., Michel J-B., Katsargyris A., Kuivaniemi H., Defraigne J-O., Nchimi A., Powell J.T., Yoshimura K., Hultgren R. Abdominal aortic aneurysms. *Nature Reviews Disease Primers*. 2018. V. 4. No. 34. P. 1–22. doi: [10.1038/s41572-018-0030-7](https://doi.org/10.1038/s41572-018-0030-7)
3. Roy D., Kauffmann C., Delorme S., Lerouge S., Cloutier G., Soulez G. A literature review of the numerical analysis of abdominal aortic aneurysms treated with endovascular stent grafts. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2012. V. 2012. No. 820389. P. 1–16. doi: [10.1155/2012/820389](https://doi.org/10.1155/2012/820389)
4. *Computational Modeling and Simulation Examples in Bioengineering*. 1st ed. Ed. Nenad Filipovic. Wiley, 2021. 384 p.
5. Scotti C.M., Shkolnik A.D., Muluk S.C., Finol E.A. Fluid-structure interaction in abdominal aortic aneurysms: effects of asymmetry and wall thickness. *BioMedical Engineering Online*. 2005. V. 4. No. 64. P. 1–22. doi: [10.1186/1475-925X-4-64](https://doi.org/10.1186/1475-925X-4-64)
6. Скрипаченко К.К., Голядкина А.А., Морозов К.М., Челнокова Н.О., Островский Н.В., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Биомеханический пациенто-ориентированный анализ влияния аневризмы на гемодинамику грудного отдела

- аорты. *Российский журнал биомеханики*. 2019. Т. 23. № 4. С. 526–536. doi: [10.15593/RZhBiomeh/2019.4.03](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.4.03)
7. Doyle B.J., Callanan A. McGloughlin T.M. A comparison of modelling techniques for computing wall stress in abdominal aortic aneurysms. *BioMedical Engineering Online*. 2007. V. 6. No. 38. P. 1–12. doi: [10.1186/1475-925X-6-38](https://doi.org/10.1186/1475-925X-6-38)
 8. Синицына Д.Э., Юхнев А.Д., Зайцев Д.К., Туркина М.В. Ультразвуковое и численное исследование структуры течения в трехмерной модели бифуркации брюшной аорты. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2019. Т. 12. № 4. С. 50–60. doi: [10.18721/JPM.12405](https://doi.org/10.18721/JPM.12405)
 9. Zhang Y., Bazilevs Y., Goswami S., Bajaj C.L., Hughes T.J.R. Patient-Specific Vascular NURBS Modeling for Isogeometric Analysis of Blood Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007. V. 196. No. 29–30. P. 2943–2959. doi: [10.1016/j.cma.2007.02.009](https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.02.009)
 10. Coda M. *Advanced patient-specific modeling and analysis of complex aortic structures by means of Isogeometric Analysis*: PhD Dissertation. Pavia: University of Pavia, 2019. 172 p.
 11. Rami Haj-Ali, Gil Marom, Zekry S.B., Rosenfeld M., Raanani E. A general three-dimensional parametric geometry of the native aortic valve and root for biomechanical modeling. *Journal of Biomechanics*. 2012. Т. 45. No. 14. P. 2392–2397. doi: [10.1016/j.jbiomech.2012.07.017](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.07.017)
 12. De Hart J., Peters G.W.M., Schreurs P.J.G., Baaijens F.P.T. A three-dimensional computational analysis of fluid–structure interaction in the aortic valve. *Journal of Biomechanics*. 2003. V. 36. No. 1. P. 103–112. doi: [10.1016/S0021-9290\(02\)00244-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(02)00244-0)
 13. Rankin J.S., Bone M.C., Fries P.M., Aicher D., Schäfers H-J., Crooke P.S. A refined hemispheric model of normal human aortic valve and root geometry. *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2013. V. 146. No. 1. P. 103–108. doi: [10.1016/j.jtcvs.2012.06.043](https://doi.org/10.1016/j.jtcvs.2012.06.043)
 14. Jatene M.B., Monteiro R., Guimarães M.H., Veronezi S.C., Koike M.K., Jatene F.B., Jatene A.D. Aortic Valve assessment. Anatomical study of 100 healthy human hearts. *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*. 1999. V. 73. No. 1. P. 81–86. doi: [10.1590/S0066-782X1999000700007](https://doi.org/10.1590/S0066-782X1999000700007)
 15. Cao K., Bukac M., Sucusky P. Three-dimensional macro-scale assessment of regional and temporal wall shear stress characteristics on aortic valve leaflets. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2016. V. 19. No. 6. P. 603–613. doi: [10.1080/10255842.2015.1052419](https://doi.org/10.1080/10255842.2015.1052419)
 16. Cao K., Sucusky P. Computational comparison of regional stress and deformation characteristics in tricuspid and bicuspid aortic valve leaflets. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2017. V. 33. No. 3. P. 1–21. doi: [10.1002/cnm.2798](https://doi.org/10.1002/cnm.2798)
 17. Wojciechowska D., Liberski A.R., Wilczek P., Butcher J., Scharfschwerdt M., Hijazi Z., Kasprzak J., Pibarot P., Bianco R. The optimal shape of an aortic heart valve replacement – on the road to the consensus. *QScience Connect*. 2017. V. 2017. No. 3. P. 1–14. doi: [10.5339/connect.2017.1](https://doi.org/10.5339/connect.2017.1)
 18. Thubrikar M. *The aortic valve*. Informa Healthcare, 2012. 232 p.
 19. Redaelli A., Di Martino E., Gamba A., Procopio A.M., Fumero R. Assessment of the influence of the compliant aortic root on aortic valve mechanics by means of a geometrical model. *Medical Engineering and Physics*. 1997. V. 19. No. 8. P. 696–710. doi: [10.1016/S1350-4533\(97\)00033-7](https://doi.org/10.1016/S1350-4533(97)00033-7)
 20. Князев Д.Н., Устинова Е.С. Построение линии пересечения двух цилиндров в параметрическом виде. В: *Технические науки в России и за рубежом: материалы IV Междунар. науч. конф.* (г. Москва, январь 2015г.). М.: Буки-Веди, 2015. С. 122–125.

21. Медведев А.Е., Гафурова П.С. Аналитическое построение полного бронхиального дерева человека в норме и при обструктивной болезни легких. *Математическая биология и биоинформатика*. 2019. Т. 14. № 5. С. 62–75. doi: [10.17537/2019.14.t62](https://doi.org/10.17537/2019.14.t62)
22. Медведев А.Е. Методика построения несимметричного бронхиального дерева человека в норме и при патологии. *Математическая биология и биоинформатика*. 2020. Т. 15. № 5. С. 21–31. doi: [10.17537/2020.15.t21](https://doi.org/10.17537/2020.15.t21)

Рукопись поступила в редакцию 10.10.2022, переработанный вариант поступил 16.11.2022.
Дата опубликования 18.11.2022.

===== MATHEMATICAL MODELING =====

Construction of Complex Three-Dimensional Structures of the Aorta of a Particular Patient Using Finite Analytical Formulas

Medvedev A.E.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia
"E.Meshalkin National Medical Research Center" of the Ministry of Health of the Russian Federation, Novosibirsk, Russia*

Abstract. We have developed a method for constructing the geometry of a morphologically realistic human aorta, including the aortic root (Valsalva sinus), thoracic aorta, aortic arch with branches, abdominal aorta with bifurcation vessels. The creation of a three-dimensional model of the human aorta is necessary when planning surgical interventions, when performing numerical modeling of blood flow in the aorta. The anatomical structure of the aorta differs in different patients, especially in the presence of various pathologies (aneurysms, stenoses, aortic dissection). Creation of an individual human aorta model based on MRI, CT images requires time-consuming manual work of a highly computer skilled specialist. Presented is a simple method of building a 3D model of the human aorta. Initially, a 3D model of the aorta (or selected section of the aorta) of one patient is created. For this purpose, an analytical 3D model of this aorta is constructed from the raw model of the aorta. To build such an analytical aorta, it is necessary to divide the aorta into characteristic sections and specify defining parameters for each section. To build a model of another patient's aorta, a base model is taken and adjusted based on the individual features of the patient's aorta structure. At that, areas of pathology (stenoses and aneurysms) are added if necessary. Correction of the basic model requires much less time and effort than creating an aortic model of a particular patient from scratch. One of the key features of the technique is ease of use, eliminating the monotonous manual labor of building an individual patient's aorta. The resulting three-dimensional model of the aorta is fully ready for 3D modeling and printing on a 3D printer. Sections of the aorta are docked with the second order of smoothness (continuous second derivative between sections of the constructed aorta).

Key words: *aorta, aortic arch Valsalva sinus, mathematical modeling, aortic bifurcation, aneurysm.*