

Стохастическое моделирование эпидемического процесса на основе стадия-зависимой модели с немарковскими ограничениями для индивидуумов

Перцев Н.В.^{*}, Топчий В.А.[†], Логинов К.К.[‡]

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Представлена непрерывно-дискретная стохастическая модель эпидемического процесса. Модель построена с учетом нескольких стадий развития инфекционного заболевания и распределений длительностей пребывания индивидуумов в этих стадиях. Переменными модели являются целочисленные случайные величины, отражающие численности когорт индивидуумов, и семейства уникальных типов индивидуумов, учитывающие текущее состояние и предысторию нахождения индивидуумов в стадиях развития инфекционного заболевания, распределения длительностей которых отличны от экспоненциального или геометрического. Приведены результаты аналитического и численного исследования динамики эпидемического процесса. Получены вероятности искоренения инфекции в течение конечного промежутка времени в зависимости от числовых значений коэффициента распространения инфекции и распределений длительностей латентной стадии заболевания и стадии поддержания иммунитета к инфекции.

Ключевые слова: *многомерный случайный процесс, немарковские компоненты, ветвящийся процесс, распределение Пуассона, метод Монте-Карло, вычислительный эксперимент, стадия-зависимая модель, эпидемиология.*

ВВЕДЕНИЕ

Современное направление в моделировании эпидемических процессов связано с разработкой стадия-зависимых моделей, учитывающих в явной форме распределения длительностей отдельных стадий заболевания и стадии поддержания иммунитета. Стадия-зависимые модели эпидемических процессов в детерминированной постановке строятся в форме систем дифференциальных уравнений с постоянным или распределенным запаздыванием (см., например, работы [1]–[7] и приведенные в этих работах ссылки на статьи других авторов). Один из подходов к построению стадия-зависимых моделей эпидемических процессов в стохастической постановке предложен в работах [8]–[11]. В качестве переменных стадия-зависимых стохастических моделей в [8]–[11] используются целочисленные случайные величины, отражающие численность когорт индивидуумов, и семейства уникальных типов индивидуумов, учитывающие текущее состояние и предысторию формирования когорт с немарковскими ограничениями для индивидуумов. Семейства уникальных типов индивидуумов представляет собой аналог переменных с запаздыванием, используемых в дифференциальных уравнениях.

*homlab@ya.ru

†topchij@gmail.com

‡kloginov85@mail.ru

Семейства уникальных типов индивидуумов содержат моменты поступления индивидуумов в ту или иную когорту и продолжительность пребывания индивидуума в конкретной когорте, которая управляется двумя независимыми случайными факторами: ограничения на время пребывания индивидуума в когорте с произвольно распределенными переходами индивидуума в другие когорты и ограничения, вызванные гибелью индивидуума от различных причин или миграционным оттоком. Необходимость введения семейств уникальных типов индивидуумов обусловлена использованием законов распределения длительности пребывания индивидуумов в различных стадиях развития инфекционного заболевания – $F(u)$, отличных от экспоненциального или геометрического распределений, не имеющих «памяти». Если для некоторой когорты распределение $F(u)$ отлично от экспоненциального или геометрического, то оставшееся время пребывания индивидуума в когорте зависит от времени, которое индивидуум уже провел в этой когорте. В случае использования экспоненциального или геометрического распределений индивидуумы становятся неразличимыми между собой с точки зрения описания их времени пребывания в соответствующей когорте, и тогда динамику когорты можно описывать только одной переменной – ее численностью.

Использование переменных в виде численности когорт индивидуумов и семейств уникальных типов индивидуумов отражает совмещение популяционного и агентного (индивидуум-ориентированного) подходов к разработке моделей эпидемических процессов. Результаты работ [10], [11] показывают, что совмещение указанных подходов позволяет использовать достаточно сложные семейства уникальных типов индивидуумов, отражающих ту или иную детализацию в описании эпидемического процесса и поведения индивидуумов. Разработка вычислительного алгоритма на основе рекуррентных соотношений для изменения численности когорт индивидуумов и семейств уникальных типов индивидуумов в сочетании с методом Монте-Карло дает возможность исследования динамики эпидемического процесса в зависимости от структуры той или иной модели, ее параметров и законов распределения продолжительности пребывания индивидуумов в когортах. Так, в частности, предложенная в работе [11] стохастическая стадия-зависимая модель распространения Ковид-19 инфекции адекватно описывает реальные данные по показателю серопревалентности населения Новосибирской области за 2020 год и позволяет оценить эффективность вакцинации и ревакцинации населения.

Настоящая работа продолжает исследования по оценке вероятности искоренения инфекции в течение конечного промежутка времени в рамках более общего варианта стохастической модели эпидемического процесса, представленной в [9]. Приведенная в статье модель использует новый подход к описанию семейств уникальных типов индивидуумов с произвольными функциями распределения продолжительности латентной стадии заболевания и стадии поддержания иммунитета к инфекции и более общим аналитическим выражением для коэффициента распространения инфекции. Кроме того, представлено одно из возможных описаний семейств уникальных типов индивидуумов в случае дискретных распределений продолжительностей указанных стадий, позволяющее снизить вычислительные затраты при численном исследовании модели.

В задачи работы входит: 1) описание модели и алгоритма численного моделирования; 2) аналитическое исследование частных случаев модели; 3) проведение вычислительных экспериментов по оценке вероятности искоренения инфекции в течение конечного промежутка времени в зависимости от начального числа зараженных индивидуумов, значений параметров модели, задающих выражение для коэффициента распространения инфекции, и распределений продолжительности латентной стадии заболевания и стадии поддержания иммунитета к инфекции.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим взрослое население некоторого региона – района, города, области. Полагаем, что при отсутствии инфекции динамика численности взрослого населения региона определяется притоком индивидуумов за счет подрастающих индивидуумов региона, миграционного притока и оттока, а также за счет смерти индивидуумов от различных причин. Принимаем, что постоянный или переменный приток в регион первично-инфицированных или заразных индивидуумов отсутствует, а возникновение инфекции в регионе обусловлено появлением в нем некоторого числа заразных индивидуумов.

Будем считать, что инфекция распространяется среди взрослого населения некоторого региона и описывается в терминах следующих когорт индивидуумов:

S — восприимчивые к инфекции индивидуумы;

E — латентно-инфицированные (незаразные) индивидуумы, находящиеся в скрытой (латентной) стадии заболевания;

I — неизолированные больные индивидуумы, способные к заражению восприимчивых индивидуумов;

V — изолированные больные индивидуумы, находящиеся на лечении;

R — переболевшие индивидуумы в легкой бессимптомной форме, или в форме со слабыми или выраженными симптомами с различной тяжестью заболевания, сформировавшие иммунитет к инфекции.

Введем две вспомогательные когорты. Обозначим через G когорту подрастающих индивидуумов рассматриваемого региона или взрослых восприимчивых к инфекции индивидуумов, поступающих из других регионов. Положим, что когорта D означает всех погибших или покинувших рассматриваемый регион индивидуумов.

Схема переходов индивидуумов между когортами представлена на рисунке 1. Приведенные на этом рисунке $\omega_G, \omega_S, \omega_E, \omega_I, \omega_V, \omega_R, \xi_S, \xi_E, \xi_I, \xi_V, \xi_R$ представляют собой случайные величины, описывающие продолжительности времени до перехода индивидуумов между когортами вследствие осуществления событий, указанных в приведенных ниже постулатах модели. Константы $0 < q_R < 1, 0 < q_I < 1, q_R + q_I = 1$ задают вероятности перехода индивидуума когорты E в когорту R или I (более подробное описание приведено в постулатах модели).

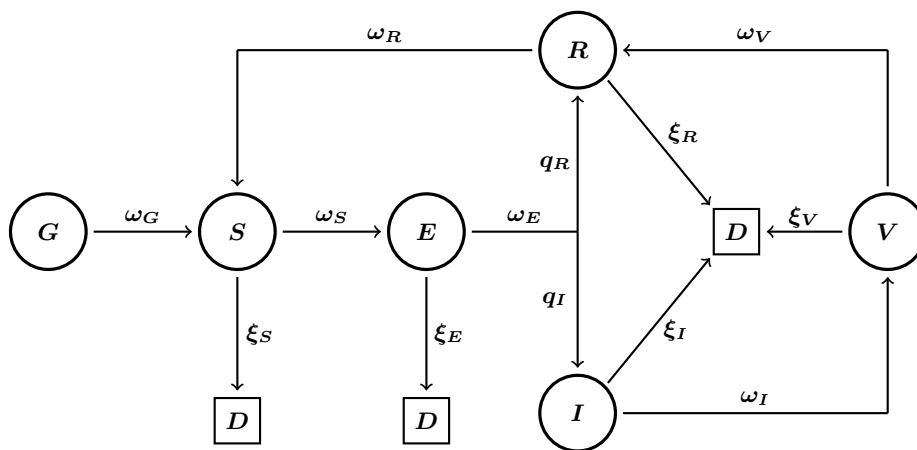


Рис. 1. Схема модели (обозначения в тексте).

Пусть вещественная переменная t означает время, $[0; T_{mod}]$ – промежуток моделирования, $(t; t + h) \subset [0; T_{mod}]$ – бесконечно малый промежуток времени, $h \rightarrow +0$. Всюду далее выражения $\xi \sim Exp(\mu), \omega \sim F_\omega$ означают, что случайная величина

ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu > 0$, случайная величина ω имеет функцию распределения $F_\omega(u)$.

Для описания динамики когорт S, E, I, V, R используем набор переменных

$$H_1(t) = (S(t), E(t), I(t), V(t), R(t)), \quad (1.1)$$

компоненты которого задают численности указанных когорт в момент времени t . Для каждого фиксированного $t > 0$ отдельные переменные из (1.1) понимаются как неотрицательные целочисленные случайные величины. Примем, что распространение инфекции в регионе начинается в момент времени $t = 0$, и в этот момент времени имеются только восприимчивые и заразные индивидуумы в количестве $S^{(0)} > 0, I^{(0)} > 0$ – некоторые целочисленные константы, остальные переменные таковы, что $E(0) = V(0) = R(0) = 0$.

Введем набор постулатов, определяющих динамику эпидемического процесса.

1.1. Первая группа постулатов. Используем популяционный подход к описанию динамики эпидемического процесса.

Зафиксируем t и положим, что

$$S(t) = x_S, E(t) = x_E, I(t) = x_I, V(t) = x_V, R(t) = x_R, \quad (1.2)$$

где x_S, x_E, x_I, x_V, x_R – неотрицательные целочисленные константы. Примем, что каждое из событий, происходящих с индивидуумами изучаемых когорт в рамках приведенных ниже постулатов, выполняется независимо от поведения и свойств остальных индивидуумов, существующих в момент времени t .

Н1. В течение промежутка $(t; t+h)$ с вероятностью $r_S h + o(h)$ когорты S пополняется одним индивидуумом, поступающим из когорты G , $r_S = const > 0$; вероятность поступления из когорты G в когорту S более одного индивидуума за $(t; t+h)$ равна $o(h)$; когорты S не пополняется из когорты G за $(t; t+h)$ с вероятностью $1 - r_S h + o(h)$.

Н2. Пусть $x_S > 0$. В течение промежутка $(t; t+h)$ один индивидуум когорты S покидает эту когорту с вероятностью $\mu_S x_S h + o(h)$ и переходит в когорту D , $\mu_S = const > 0$; вероятность перехода в когорту D более одного индивидуума когорты S за $(t; t+h)$ равна $o(h)$; индивидуум не покидает когорту S за $(t; t+h)$ с вероятностью $1 - \mu_S x_S h + o(h)$.

Н3. Пусть $x_S > 0, x_I > 0$. В течение промежутка $(t; t+h)$ с вероятностью $\beta_{S,I} x_S x_I h + o(h)$ происходит контакт одной пары индивидуумов когорт S, I , приводящий к переходу индивидуума когорты S в когорту E , $\beta_{S,I} = const > 0$; вероятность контакта более одной пары индивидуумов когорт S, I за $(t; t+h)$ равна $o(h)$; с вероятностью $1 - \beta_{S,I} x_S x_I h + o(h)$ контакт пары индивидуумов когорт S, I за промежуток $(t; t+h)$ не происходит.

Н4. Пусть $x_I > 0$. В течение промежутка $(t; t+h)$ один индивидуум когорты I покидает эту когорту с вероятностью $\mu_I x_I h + o(h)$ и переходит в когорту D , $\mu_I = const > 0$; вероятность перехода в когорту D более одного индивидуума когорты I за $(t; t+h)$ равна $o(h)$; индивидуум не покидает когорту I за $(t; t+h)$ с вероятностью $1 - \mu_I x_I h + o(h)$.

Н5. Пусть $x_I > 0$. В течение промежутка $(t; t+h)$ один индивидуум когорты I покидает эту когорту с вероятностью $\gamma_I x_I h + o(h)$ и переходит в когорту V , $\gamma_I = const > 0$; вероятность перехода в когорту V более одного индивидуума когорты I за $(t; t+h)$ равна $o(h)$; индивидуум не покидает когорту I за $(t; t+h)$ с вероятностью $1 - \gamma_I x_I h + o(h)$.

Н6. События, перечисленные в постулатах Н1–Н5, происходят независимо друг от друга, и изменение переменных (1.2) происходит в результате наступления одного из указанных событий, которое происходит первым после момента времени t .

Н7. Опишем случайные величины $\omega_G, \xi_S, \omega_S, \xi_I, \omega_I$, приведенные на рисунке 1:

- $\omega_G \sim Exp(r_S)$ – продолжительность времени до очередного поступления

индивидуума когорты S из когорты G (без учета поступления индивидуумов из когорты R);

- $\xi_S \sim \text{Exp}(\mu_S x_S)$ – продолжительность времени до гибели некоторого индивидуума когорты S (при $x_S > 0$) от различных причин или его миграционного оттока в другие регионы (без учета пополнения когорты S из когорты G, R и контактов индивидуумов когорты S, I , приводящих к переходу индивидуумов когорты S в когорту E);
- $\omega_S \sim \text{Exp}(\beta_{S,I} x_S x_I)$ – продолжительность времени до перехода некоторого индивидуума когорты S (при $x_S > 0$) в когорту E в результате инфицирования некоторым индивидуумом когорты I (при $x_I > 0$) (без учета пополнения когорты S из когорты G, R и перехода индивидуумов когорты S в когорту D);
- $\xi_I \sim \text{Exp}(\mu_I x_I)$ – продолжительность времени до гибели некоторого индивидуума когорты I (при $x_I > 0$) от различных причин или его миграционного оттока в другие регионы (без учета поступления индивидуумов когорты I из когорты E и перехода индивидуумов когорты I в когорту V);
- $\omega_I \sim \text{Exp}(\gamma_I x_I)$ – продолжительность времени до обращения некоторого индивидуума когорты I (при $x_I > 0$) в медицинские учреждения для проведения лечения (без учета поступления индивидуумов когорты I из когорты E и перехода индивидуумов когорты I в когорту D).

Случайные величины $\omega_G, \xi_S, \omega_S, \xi_I, \omega_I$ взаимно-независимы и не зависят от поведения остальных индивидуумов всех рассматриваемых когорт.

Индивидуумы, покидающие когорты S, I , исключаются равновозможно из существующих в текущий момент времени индивидуумов этих когорт.

Замечание 1. Следуя постулату Н6 и используя случайные величины, указанные в постулате Н7, введем случайную величину

$$\tau = \min\{\omega_G, \xi_S, \omega_S, \xi_I, \omega_I\}. \quad (1.3)$$

Случайная величина τ , заданная соотношением (1.3), такова, что $t + \tau$ означает ближайший к t (справа) момент времени, в который происходит переход некоторого индивидуума в одну из когорт S, E, V, D (без учета возможных переходов индивидуумов когорт E, V, R в другие когорты). В частности, если $\tau = \omega_S$, то в момент времени $t + \omega_S$ осуществляется переход индивидуума когорты S в когорту E ; если $\tau = \omega_I$, то в момент времени $t + \omega_I$ осуществляется переход индивидуума когорты I в когорту V .

Замечание 2. Случайная величина τ , заданная соотношением (1.3), является минимумом из пяти взаимно-независимых экспоненциально распределенных величин с параметрами, перечисленными в постулате Н7. Тогда $\tau \sim \text{Exp}(\rho)$ с параметром

$$\rho = r_S + \mu_S x_S + \beta_{S,I} x_S x_I + \mu_I x_I + \gamma_I x_I > 0. \quad (1.4)$$

Пусть в момент времени $t + \tau$ осуществился переход некоторого индивидуума из одной когорты в другую. Стандартные свойства вероятности реализации минимума на одной из экспоненциально распределенных случайных величин определяют вероятности переходов $p_{A,B}$ из когорты A в когорту B :

$$p_{G,S} = \frac{r_S}{\rho}, \quad p_{S,D} = \frac{\mu_S x_S}{\rho}, \quad p_{S,I} = \frac{\beta_{S,I} x_S x_I}{\rho}, \quad (1.5)$$

$$p_{I,D} = \frac{\mu_I x_I}{\rho}, \quad p_{I,V} = \frac{\gamma_I x_I}{\rho}. \quad (1.6)$$

Замечание 3. Константы, указанные в первой группе постулатов, имеют следующую интерпретацию:

- r_S^{-1} – среднее время до пополнения когорты S индивидуумом, поступающим из когорты G ;
- μ_S^{-1}, μ_I^{-1} – среднее время до перехода отдельно взятого индивидуума соответственно когорты S, I в когорту D ;
- $\beta_{S,I}^{-1}$ – среднее время до контакта ровно одной пары индивидуумов когорт S, I ;
- γ_I^{-1} – среднее время до перехода отдельно взятого индивидуума когорты I в когорту V .

1.2. Вторая группа постулатов. Приведенные ниже постулаты опираются на агентный (индивидуум-ориентированный) подход к описанию динамики эпидемического процесса.

Пусть A – одна из когорт E, V, R , символ \mathcal{A} означает некоторого или произвольно выбранного индивидуума когорты A . Для описания событий, происходящих с индивидуумами $\mathcal{E}, \mathcal{V}, \mathcal{R}$, используем следующие законы распределения случайных величин $\xi_E, \omega_E, \xi_V, \omega_V, \xi_R, \omega_R$, указанных на рис. 1:

$$\begin{aligned} \xi_E &\sim \text{Exp}(\mu_E), \mu_E = \text{const} > 0, \quad \xi_V \sim \text{Exp}(\mu_V), \mu_V = \text{const} > 0, \\ \xi_R &\sim \text{Exp}(\mu_R), \mu_R = \text{const} > 0, \quad \omega_E \sim F_{\omega_E}, \omega_V \sim F_{\omega_V}, \omega_R \sim F_{\omega_R}. \end{aligned}$$

Функции распределения $F_{\omega_E}(u), F_{\omega_V}(u), F_{\omega_R}(u)$ могут быть любыми, не обязательно совпадающими с экспоненциальным или геометрическим распределениями, и удовлетворяющими следующим условиям: не имеют атомов в нуле и математические ожидания $\omega_E, \omega_V, \omega_R$ конечны, т.е.

$$\begin{aligned} F_{\omega_E}(+0) &= F_{\omega_V}(+0) = F_{\omega_R}(+0) = 0, \\ \int_0^\infty u dF_{\omega_E}(u) &< \infty, \quad \int_0^\infty u dF_{\omega_V}(u) < \infty, \quad \int_0^\infty u dF_{\omega_R}(u) < \infty. \end{aligned}$$

Н8. Пусть индивидуум \mathcal{E} появился в когорте E в некоторый момент времени $t_{\mathcal{E}}$. Обозначим через $\xi_{\mathcal{E}} \sim \text{Exp}(\mu_E)$ продолжительность времени до гибели \mathcal{E} от различных причин или его миграционного оттока в другие регионы, приводящих к переходу \mathcal{E} в когорту D . Через $\omega_{\mathcal{E}} \sim F_{\omega_E}$ обозначим длительность пребывания \mathcal{E} в когорте E до его перехода в когорту R или когорту I вследствие окончания латентной стадии заболевания. Величины $\xi_{\mathcal{E}}, \omega_{\mathcal{E}}$ не зависят от момента времени $t_{\mathcal{E}}$ и не зависят от поведения остальных индивидуумов всех рассматриваемых когорт. События, связанные с переходом \mathcal{E} когорту R или когорту I не зависят от $t_{\mathcal{E}}, \xi_{\mathcal{E}}, \omega_{\mathcal{E}}$, от поведения остальных индивидуумов всех рассматриваемых когорт и задаются вероятностями q_R, q_I . Вероятности q_R, q_I отражают распределение покидающих когорту E индивидуумов по форме и степени тяжести возникающего у них заболевания (либо легкая бессимптомная форма с переходом в когорту R , либо форма со слабыми или выраженными симптомами с малой, средней, сильной тяжестью заболевания с переходом в когорту I). Индивидуум \mathcal{E} покидает когорту E в момент времени $t_{\mathcal{E}} + \min\{\xi_{\mathcal{E}}, \omega_{\mathcal{E}}\}$.

Н9. Пусть индивидуум \mathcal{V} когорты V появился в этой когорте в некоторый момент времени $t_{\mathcal{V}}$. Обозначим через $\xi_{\mathcal{V}} \sim \text{Exp}(\mu_V)$ продолжительность времени до гибели \mathcal{V}

от различных причин или его миграционного оттока в другие регионы, приводящих к переходу \mathcal{V} в когорту D . Через $\omega_{\mathcal{V}} \sim F_{\omega_{\mathcal{V}}}$ обозначим длительность пребывания \mathcal{V} в когорте V до его перехода в когорту R вследствие полного выздоровления. Величины $\xi_{\mathcal{V}}, \omega_{\mathcal{V}}$ не зависят от момента времени $t_{\mathcal{V}}$ и не зависят от поведения остальных индивидуумов всех рассматриваемых когорт. Индивидуум \mathcal{V} покидает когорту V в момент времени $t_{\mathcal{V}} + \min\{\xi_{\mathcal{V}}, \omega_{\mathcal{V}}\}$.

Н10. Пусть индивидуум \mathcal{R} когорты R появился в этой когорте в некоторый момент времени $t_{\mathcal{R}}$. Обозначим через $\xi_{\mathcal{R}} \sim Exp(\mu_{\mathcal{R}})$ продолжительность времени до гибели \mathcal{R} от различных причин или его миграционного оттока в другие регионы, приводящих к переходу \mathcal{R} в когорту D . Через $\omega_{\mathcal{R}} \sim F_{\omega_{\mathcal{R}}}$ обозначим длительность пребывания \mathcal{R} в когорте R до его перехода в когорту S вследствие снижения уровня иммунитета. Величины $\xi_{\mathcal{R}}, \omega_{\mathcal{R}}$ не зависят от момента времени $t_{\mathcal{R}}$ и не зависят от поведения остальных индивидуумов всех рассматриваемых когорт. Индивидуум \mathcal{R} покидает когорту R в момент времени $t_{\mathcal{R}} + \min\{\xi_{\mathcal{R}}, \omega_{\mathcal{R}}\}$.

Замечание 4. Вторая группа постулатов содержит в общем случае немарковские ограничения для индивидуумов когорт E, V, R , обусловленные использованием функций распределения $F_{\omega_E}(u), F_{\omega_V}(u), F_{\omega_R}(u)$, которые могут отличаться от экспоненциального или геометрического распределений. Немарковские ограничения приводят к необходимости учитывать не только численность (1.1) рассматриваемых когорт в текущий момент времени t , но и предысторию формирования каждой из когорт E, V, R в течение промежутка времени $[0; t]$. Предыстория формирования указанных когорт обусловлена начальной численностью когорт $S^{(0)} > 0, I^{(0)} > 0, E(0) = 0, V(0) = 0, R(0) = 0$, переходами индивидуумов между когортами и поступлением новых индивидуумов в когорту S из когорты G .

Замечание 5. Обозначим через

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + V(t) + R(t) + D(t), \quad t \geq 0,$$

«расширенную» численность всех когорт, полагая, что случайная неотрицательная целочисленная переменная $D(t)$ означает численность вспомогательной когорты D в фиксированный момент времени $t \geq 0$. Положим, что $D(0) \geq 0$ – некоторая целочисленная константа. Имеем, что $N(0) = S^{(0)} + I^{(0)} + D(0) = const > 0$. Опираясь на постулаты первой и второй группы, нетрудно заметить, что переход индивидуума из одной когорты в другую приводит к уменьшению на единицу соответствующей переменной из $S(t), E(t), I(t), V(t), R(t)$ и одновременно к увеличению на единицу одной из не совпадающих с ней перечисленных переменных или к увеличению на единицу переменной $D(t)$. Учитывая пополнение когорты S из когорты G с интенсивностью r_S , получаем, что при $t > 0$ случайный процесс $N(t) - N(0)$ описывается однородным пуассоновским потоком с параметром r_S .

Процесс $N(t) - N(0)$ можно интерпретировать как суммарное число индивидуумов, поступивших в когорты S, E, I, V, R, D за промежуток времени $(0; t]$. Для каждого фиксированного $t > 0$ случайная величина $N(t) - N(0)$ имеет распределение Пуассона с параметром $r_S t$ и, в частности, $N(T_{mod}) - N(0)$ имеет распределение Пуассона с параметром $r_S T_{mod}$, а математическое ожидание $\mathbf{E}N(T_{mod}) = N(0) + r_S T_{mod}$. Следовательно, неограниченный рост численности всех или отдельно взятых когорт на промежутке $[0; T_{mod}]$ невозможен, и в каждую когорту за промежуток времени $[0; T_{mod}]$ поступает конечное случайное количество индивидуумов.

1.3. Семейства уникальных типов индивидуумов. Опираясь на замечания 4, 5, введем случайные величины и множества

$$N_E, \widehat{\Omega}_E, N_V, \widehat{\Omega}_V, N_R, \widehat{\Omega}_R, \quad (1.7)$$

отражающие «судьбу» индивидуумов, поступивших в когорты E, V, R в течение всего промежутка времени $[0; T_{mod}]$.

Пусть A – некоторая когорта из E, V, R . Полагаем, что в (1.7) неотрицательная целочисленная случайная величина N_A задает количество индивидуумов, поступивших в когорту A за промежуток времени $[0; T_{mod}]$. Под $\widehat{\Omega}_A$ будем понимать семейство уникальных типов индивидуумов когорты A , содержащее $N_A \geq 1$ элементов:

$$\widehat{\Omega}_A = \left\{ (t_A(1), \varphi_A(1), \eta_A(1)), \dots, (t_A(N_A), \varphi_A(N_A), \eta_A(N_A)) \right\}. \quad (1.8)$$

Элементами $\widehat{\Omega}_A$, приведенного в (1.8), являются тройки

$$(t_A(j), \varphi_A(j), \eta_A(j)), \quad 1 \leq j \leq N_A, \quad (1.9)$$

где индекс $j = 1, 2, \dots, N_A$ означает порядковый номер поступления очередного индивидуума \mathcal{A} в когорту A . Для сокращения записи положим, что $\mathcal{A}(j)$ означает индивидуума \mathcal{A} с порядковым номером поступления $1 \leq j \leq N_A$ в когорту A .

Для фиксированного j элемент (1.9) семейства $\widehat{\Omega}_A$ содержит следующие случайные величины. Величина $t_A(j)$ означает момент поступления в когорту A индивидуума $\mathcal{A}(j)$. Величина

$$\varphi_A(j) = \min\{\omega_A(j), \xi_A(j)\} \quad (1.10)$$

означает длительность пребывания в когорте A индивидуума $\mathcal{A}(j)$ до перехода этого индивидуума в некоторую отличную от A когорту в момент времени

$$t_A(j) + \varphi_A(j). \quad (1.11)$$

В формуле (1.10) $\xi_A(j) \sim Exp(\mu_A)$ – продолжительность времени до перехода $\mathcal{A}(j)$ в когорту D , $\omega_A(j) \sim F_{\omega_A}$ – длительность пребывания $\mathcal{A}(j)$ в когорте A до его перехода в некоторую когорту, отличную от D .

В формуле (1.9) величина $\eta_A(j)$ представляет собой индикатор «судьбы» индивидуума $\mathcal{A}(j)$. Если $\xi_A(j) \leq \omega_A(j)$, то $\eta_A(j) = 0$, что означает переход $\mathcal{A}(j)$ в когорту D . Если $\xi_E(j) > \omega_E(j)$, то $\eta_E(j) = 1, 2$ с вероятностями q_I, q_R , что определяет переход $\mathcal{E}(j)$ в когорту I или когорту R . Если $\xi_V(j) > \omega_V(j)$, то $\eta_V(j) = 1$, что означает переход $\mathcal{V}(j)$ в когорту R . Если $\xi_R(j) > \omega_R(j)$, то $\eta_R(j) = 1$, что означает переход $\mathcal{R}(j)$ в когорту S .

Входящие в $\widehat{\Omega}_E, \widehat{\Omega}_V, \widehat{\Omega}_R$ случайные величины

$$\begin{aligned} &\omega_E(1), \xi_E(1), \dots, \omega_E(N_E), \xi_E(N_E), \\ &\omega_V(1), \xi_V(1), \dots, \omega_V(N_V), \xi_V(N_V), \\ &\omega_R(1), \xi_R(1), \dots, \omega_R(N_R), \xi_R(N_R), \end{aligned}$$

взаимно-независимы, не зависят от

$$t_E(1), \dots, t_E(N_E), t_V(1), \dots, t_V(N_V), t_R(1), \dots, t_R(N_R),$$

и не зависят от поведения и свойств индивидуумов когорты S, I .

Исходя из замечания 1 и формулы (1.3), имеем, что момент времени $t_E(j)$, указанный

в (1.9), обусловлен переходом некоторого индивидуума когорты S в когорту E . Под $t_{\mathcal{E}}(j)$ будем понимать $t_{\mathcal{E}}(j) = t_j + \omega_S(j)$, где t_j – некоторый фиксированный момент времени, $S(t_j)I(t_j) = x_S x_I = const > 0$, $\omega_S(j) \sim Exp(\beta_{S,I} x_S x_I)$.

Исходя из замечания 1 и формулы (1.3), имеем, что момент времени $t_{\mathcal{V}}(j)$, указанный в (1.9), обусловлен переходом некоторого индивидуума когорты I в когорту V . Под $t_{\mathcal{V}}(j)$ будем понимать $t_{\mathcal{V}}(j) = t_j + \omega_I(j)$, где t_j – некоторый фиксированный момент времени, $I(t_j) = x_I = const > 0$, $\omega_I(j) \sim Exp(\gamma_I x_I)$.

Опираясь на постулаты Н8, Н9, имеем, что момент времени $t_{\mathcal{R}}(j)$, указанный в (1.9), обусловлен переходом в когорту R некоторого индивидуума $\mathcal{E}(\ell)$ или некоторого индивидуума $\mathcal{V}(k)$. Привлекая замечание 1 и формулу (1.3), под $t_{\mathcal{R}}(j)$ будем понимать

$$t_{\mathcal{R}}(j) = t_{\mathcal{E}}(\ell) + \omega_{\mathcal{E}}(\ell) \text{ или } t_{\mathcal{R}}(j) = t_{\mathcal{V}}(k) + \omega_{\mathcal{V}}(k)$$

при некоторых ℓ или k , где в свою очередь $t_{\mathcal{E}}(\ell)$ задан с помощью случайной величины $\omega_S(n) \sim Exp(\beta_{S,I} x_S x_I)$ при некотором фиксированном t_n , $S(t_n)I(t_n) = x_S x_I = const > 0$, $t_{\mathcal{V}}(k)$ – с помощью случайной величины $\omega_I(m) \sim Exp(\gamma_I x_I)$ при некотором фиксированном t_m , $I(t_m) = x_I = const > 0$.

Учитывая, что экспоненциальное распределение относится к распределениям абсолютно непрерывного типа, получаем, что вероятность совпадения любой пары, тройки и т.д. из набора элементов

$$\begin{aligned} & t_{\mathcal{E}}(1), \dots, t_{\mathcal{E}}(N_E), t_{\mathcal{E}}(1) + \varphi_{\mathcal{E}}(1), \dots, t_{\mathcal{E}}(N_E) + \varphi_{\mathcal{E}}(N_E), \\ & t_{\mathcal{V}}(1), \dots, t_{\mathcal{V}}(N_V), t_{\mathcal{V}}(1) + \varphi_{\mathcal{V}}(1), \dots, t_{\mathcal{V}}(N_V) + \varphi_{\mathcal{V}}(N_V), \\ & t_{\mathcal{R}}(1), \dots, t_{\mathcal{R}}(N_R), t_{\mathcal{R}}(1) + \varphi_{\mathcal{R}}(1), \dots, t_{\mathcal{E}}(N_R) + \varphi_{\mathcal{R}}(N_R) \end{aligned}$$

равна нулю.

В дополнение к (1.8) примем, что $\widehat{\Omega}_A = \emptyset$ в случае $N_A = 0$.

Пусть A – некоторая когорта из E, V, R , $A(t)$ – численность когорты A в момент времени t . Исходя из описания переменных (1.1), положим, что $A(0) = 0$. Выразим $A(t)$ через N_A и $\widehat{\Omega}_A$ при $t > 0$. Если $N_A = 0$, то $\widehat{\Omega}_A = \emptyset$ и $A(t) = 0$. Если $N_A \geq 1$, то $\widehat{\Omega}_A \neq \emptyset$ и $A(t) = |\Omega_A(t)|$ – мощность семейства

$$\Omega_A(t) = \left\{ (t_A(j), \varphi_A(j), \eta_A(j)) \in \widehat{\Omega}_A : t_A(j) \leq t < t_A(j) + \varphi_A(j), 1 \leq j \leq N_A \right\}. \quad (1.12)$$

Семейство $\Omega_A(t)$ учитывает всех индивидуумов когорты A , существующих в момент времени t , а именно: индивидуумов, появившихся в когорте до момента t включительно, и завершающих свое пребывание в этой когорте в моменты времени, следующие за t .

Замечание 6. Длительность пребывания индивидуумов в когортах S, I не имеет дополнительных ограничений, аналогичных ограничениям для индивидуумов когорт E, V, R . Индивидуумы каждой из когорт S, I неразличимы между собой по оставшемуся времени пребывания в соответствующей когорте, распределенному экспоненциально с параметрами μ_S, μ_I . Поэтому нет необходимости введения семейств уникальных типов $\widehat{\Omega}_S, \widehat{\Omega}_I, \Omega_S(t), \Omega_I(t)$.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ МОДЕЛИ

Используя (1.7)–(1.10), введем набор переменных

$$H_2(t) = (N_E(t), \widehat{\Omega}_E(t), N_V(t), \widehat{\Omega}_V(t), N_R(t), \widehat{\Omega}_R(t)), t \in [0; T_{mod}]. \quad (2.1)$$

Зафиксируем $t \in [0; T_{mod}]$ и определим компоненты $H_2(t)$, указанные в (2.1).

Пусть A – некоторая когорта из E, V, R . Положим, что $N_A(0) = const = 0$, а при $t > 0$ $N_A(t)$ означает неотрицательную целочисленную случайную величину, задающую количество индивидуумов, поступивших в когорту A за промежуток времени $(0; t]$. Положим, что

$$\widehat{\Omega}_A(0) = \emptyset, \quad (2.2)$$

а при $t > 0$ под $\widehat{\Omega}_A(t)$ будем понимать семейство уникальных типов индивидуумов когорты A , включающее в себя тройки (1.9) при $1 \leq j \leq N_A(t)$:

$$\widehat{\Omega}_A(t) = \emptyset, \text{ если } N_A(t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\widehat{\Omega}_A(t) = \left\{ (t_A(1), \varphi_A(1), \eta_A(1)), \dots, (t_A(N_A(t)), \varphi_A(N_A(t)), \eta_A(N_A(t))) \right\},$$

если $N_A(t) \geq 1$. (2.4)

Динамику переменных (1.1), (2.1) будем описывать с помощью случайного процесса

$$H(t) = (H_1(t), H_2(t)), \quad t \in [0; T_{mod}]. \quad (2.5)$$

Закономерности изменения компонент $H(t)$ на промежутке времени $[0; T_{mod}]$ зададим с помощью последовательности

$$(t_n, H(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_n \leq T_{mod}, \quad (2.6)$$

где $t_0 = 0$ — начальный момент времени, компоненты $H(t_0)$ таковы, что

$$S(t_0) = S^{(0)}, \quad E(t_0) = 0, \quad I(t_0) = I^{(0)}, \quad V(t_0) = 0, \quad R(t_0) = 0, \quad (2.7)$$

$$N_E(t_0) = 0, \quad \widehat{\Omega}_E(t_0) = \emptyset, \quad N_V(t_0) = 0, \quad \widehat{\Omega}_V(t_0) = \emptyset, \quad N_R(t_0) = 0, \quad \widehat{\Omega}_R(t_0) = \emptyset, \quad (2.8)$$

где $S^{(0)} > 0, I^{(0)} > 0$ – фиксированные целочисленные константы.

Каждый t_{n+1} в (2.6) означает момент времени, в который происходит скачкообразное изменение компонент процесса $H(t)$ от $H(t_n)$ до $H(t_{n+1})$, обусловленных осуществлением одного из переходов индивидуумов между когортами, указанных в постулатах модели.

Определим рекуррентные соотношения для последовательности (2.6).

Пусть $n = 0$. Учитывая $t_0 = 0$, соотношения (2.7), (2.8), используя замечания 1, 2, формулы (1.3), (1.4), введем экспоненциально распределенную случайную величину

$$\tau^{(0)} \sim \text{Exp}(\rho(t_0)) \quad (2.9)$$

с параметром

$$\rho(t_0) = r_S + \mu_S S(t_0) + \mu_I I(t_0) + \beta_{S,I} S(t_0) I(t_0) + \gamma_I I(t_0). \quad (2.10)$$

Положим

$$t_1 = t_0 + \tau^{(0)}, \quad (2.11)$$

где t_1 означает момент времени, в который происходит первое, считая от t_0 , изменение компонент $H(t_0)$. Эти изменения обусловлены наступлением одного из следующих событий: поступление индивидуума из когорты G в когорту S , переходами индивидуумов когорт S, I в когорту D , переходом индивидуума из когорты S в когорту E и переходом индивидуума из когорты I в когорту V (см. структуру слагаемых в (2.10)). Предварительно

примем, что

$$H(t) = H(t_0), \quad t \in [t_0; t_1]. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) дополним изменениями $H(t_0)$ в виде

$$H(t_1) = H(t_0) + \Delta H(t_0), \quad (2.13)$$

где $\Delta H(t_0)$ понимается как изменение части компонент $H(t_0)$.

Опираясь на замечание 2 и формулы (1.5), (1.6), получаем, что компоненты $\Delta H(t_0)$, используемые в (2.13), задаются на основе одного из следующих пяти вероятностных соотношений:

$$\text{с вероятностью } \frac{r_S}{\rho(t_0)} : S(t_1) = S(t_0) + 1; \quad (2.14)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_S S(t_0)}{\rho(t_0)} : S(t_1) = S(t_0) - 1; \quad (2.15)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_I I(t_0)}{\rho(t_0)} : I(t_1) = I(t_0) - 1; \quad (2.16)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\beta_{S,I} S(t_0) I(t_0)}{\rho(t_0)} : \quad (2.17)$$

$$S(t_1) = S(t_0) - 1, E(t_1) = E(t_0) + 1, N_E(t_1) = N_E(t_0) + 1 = 1, \quad (2.18)$$

$$t_{\mathcal{E}}(1) = t_1, \widehat{\Omega}_E(t_1) = \widehat{\Omega}_E(t_0) \cup (t_{\mathcal{E}}(1), \varphi_{\mathcal{E}}(1), \eta_{\mathcal{E}}(1)) = \left\{ (t_{\mathcal{E}}(1), \varphi_{\mathcal{E}}(1), \eta_{\mathcal{E}}(1)) \right\}; \quad (2.19)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\gamma_I I(t_0)}{\rho(t_0)} : \quad (2.20)$$

$$I(t_1) = I(t_0) - 1, V(t_1) = V(t_0) + 1, N_V(t_1) = N_V(t_0) + 1, \quad (2.21)$$

$$t_{\mathcal{V}}(1) = t_1, \widehat{\Omega}_V(t_1) = \widehat{\Omega}_V(t_0) \cup (t_{\mathcal{V}}(1), \varphi_{\mathcal{V}}(1), \eta_{\mathcal{V}}(1)) = \left\{ (t_{\mathcal{V}}(1), \varphi_{\mathcal{V}}(1), \eta_{\mathcal{V}}(1)) \right\}. \quad (2.22)$$

В соответствии с (2.12), (2.13), компоненты $H(t_0)$, не указанные в (2.14)–(2.22), остаются неизменными.

Пусть $n = 1$. Зафиксируем момент времени t_1 и компоненты случайного процесса $H(t_1)$:

$$S(t_1), E(t_1), I(t_1), V(t_1), R(t_1), N_E(t_1), N_V(t_1), N_R(t_1), \\ \widehat{\Omega}_E(t_1), \widehat{\Omega}_V(t_1), \widehat{\Omega}_R(t_1). \quad (2.23)$$

Введем величины $\psi_E^{(1)}, \psi_V^{(1)}$, заданные следующими соотношениями:

$$\psi_E^{(1)} = t_{\mathcal{E}}(1) + \varphi_{\mathcal{E}}(1), \text{ если } N_E(t_1) = 1, \quad (2.24)$$

$$\psi_E^{(1)} = +\infty, \text{ если } N_E(t_1) = 0, \quad (2.25)$$

$$\psi_V^{(1)} = t_{\mathcal{V}}(1) + \varphi_{\mathcal{V}}(1), \text{ если } N_V(t_1) = 1, \quad (2.26)$$

$$\psi_V^{(1)} = +\infty, \text{ если } N_V(t_1) = 0. \quad (2.27)$$

Конечная величина $\psi_E^{(1)}$ определяет ближайший к t_1 (справа) момент осуществления перехода индивидуума когорты E в одну из когорт: если $\eta_{\mathcal{E}}(1) = 0$, то в когорту D ; если $\eta_{\mathcal{E}}(1) = 1$, то в когорту I , если $\eta_{\mathcal{E}}(1) = 2$, то в когорту R .

Конечная величина $\psi_V^{(1)}$ определяет ближайший к t_1 (справа) момент осуществления

перехода индивидуума когорты V в одну из когорт: если $\eta_V(1) = 0$, то в когорту D ; если $\eta_E(1) = 1$, то в когорту R .

Отметим, что компоненты (2.23) таковы, что $N_R(t_1) = N_R(t_0) = 0$, $\widehat{\Omega}_R(t_1) = \emptyset$, и не требуется вводить величину $\psi_R^{(1)}$, аналогичную $\psi_E^{(1)}$, $\psi_V^{(1)}$.

Используя замечания 1, 2, формулы (1.3), (1.4), обозначим через

$$\tau^{(1)} \sim Exp(\rho(t_1)), \quad (2.28)$$

случайную величину с экспоненциальным распределением, параметр которого имеет вид

$$\rho(t_1) = r_S + \mu_S S(t_1) + \mu_I I(t_1) + \beta_{S,I} S(t_1) I(t_1) + \gamma_I I(t_1). \quad (2.29)$$

Случайная величина $\tau^{(1)}$, заданная (2.28), (2.29), такова, что $t_1 + \tau^{(1)}$ определяет ближайший к t_1 (справа) момент времени, в который может происходить изменение компонент $H(t_1)$. Эти возможные изменения обусловлены поступлением индивидуума из когорты G в когорту S , переходами индивидуумов когорт S , I в когорту D , переходом индивидуума из когорты S в когорту E и переходом индивидуума из когорты I в когорту V при условии, что ранее не наступит одно из событий, указанных в описании величин $\psi_E^{(1)}$, $\psi_V^{(1)}$ (см. (2.24), (2.26)).

Положим

$$t_2 = \min \{ \psi_E^{(1)}, \psi_V^{(1)}, t_1 + \tau^{(1)} \}, \quad (2.30)$$

и предварительно примем, что

$$H(t) = H(t_n), \quad t \in [t_1; t_2]. \quad (2.31)$$

Соотношение (2.31) дополним изменениями $H(t_2)$ в виде

$$H(t_2) = H(t_1) + \Delta H(t_1), \quad (2.32)$$

где $\Delta H(t_1)$ понимается как изменение части компонент $H(t_1)$.

Примем, что в формуле (2.30)

$$t_2 = \psi_E^{(1)}. \quad (2.33)$$

Тогда в (2.31), (2.32) приходим к соотношению

$$E(t_2) = E(t_1) - 1 = 0. \quad (2.34)$$

Пусть тройка $(t_E(1), \varphi_E(1), \eta_E(1))$, составляющая $\widehat{\Omega}_E(t_1)$, такова, что $\eta_E(1) \neq 0$. Тогда:

$$\text{если } \eta_E(1) = 1, \text{ то } I(t_2) = I(t_1) + 1, \quad (2.35)$$

$$\text{если } \eta_E(1) = 2, \text{ то } R(t_2) = R(t_1) + 1 = 1, \quad N_R(t_2) = N_R(t_1) + 1 = 1, \quad (2.36)$$

$$t_{\mathcal{R}}(1) = t_2, \quad \widehat{\Omega}_R(t_2) = \widehat{\Omega}_R(t_1) \cup (t_{\mathcal{R}}(1), \varphi_{\mathcal{R}}(1), \eta_{\mathcal{R}}(1)) = \left\{ (t_{\mathcal{R}}(1), \varphi_{\mathcal{R}}(1), \eta_{\mathcal{R}}(1)) \right\}. \quad (2.37)$$

В соответствии с (2.31), (2.32), компоненты $H(t_1)$, не указанные в (2.34)–(2.37), остаются неизменными.

Примем, что в формуле (2.30)

$$t_2 = \psi_V^{(1)}. \quad (2.38)$$

Тогда в (2.31), (2.32) приходим к соотношению

$$V(t_2) = V(t_1) - 1 = 0. \quad (2.39)$$

В случае $\eta_V(1) = 1$ по аналогии с (2.36), (2.37) получаем, что

$$R(t_2) = R(t_1) + 1 = 1, N_R(t_2) = N_R(t_1) + 1 = 1, \quad (2.40)$$

$$t_{\mathcal{R}}(1) = t_2, \widehat{\Omega}_R(t_2) = \widehat{\Omega}_R(t_1) \cup (t_{\mathcal{R}}(1), \varphi_{\mathcal{R}}(1), \eta_{\mathcal{R}}(1)) = \left\{ (t_{\mathcal{R}}(1), \varphi_{\mathcal{R}}(1), \eta_{\mathcal{R}}(1)) \right\}. \quad (2.41)$$

В соответствии с (2.31), (2.32), компоненты $H(t_1)$, не указанные в (2.39)–(2.41), остаются неизменными.

Примем, что в формуле (2.30)

$$t_2 = t_1 + \xi^{(1)}. \quad (2.42)$$

По аналогии с (2.14)–(2.22) в (2.31), (2.32) приходим к соотношениям

$$\text{с вероятностью } \frac{r_S}{\rho(t_1)} : S(t_2) = S(t_1) + 1; \quad (2.43)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_S S(t_1)}{\rho(t_1)} : S(t_2) = S(t_1) - 1; \quad (2.44)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_I I(t_1)}{\rho(t_1)} : I(t_2) = I(t_1) - 1; \quad (2.45)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\beta_{S,I} S(t_1) I(t_1)}{\rho(t_1)} : \quad (2.46)$$

$$S(t_2) = S(t_1) - 1, E(t_2) = E(t_1) + 1, N_E(t_2) = N_E(t_1) + 1, \quad (2.47)$$

$$j = N_E(t_2), t_{\mathcal{E}}(j) = t_2, \widehat{\Omega}_E(t_2) = \widehat{\Omega}_E(t_1) \cup (t_{\mathcal{E}}(j), \varphi_{\mathcal{E}}(j), \eta_{\mathcal{E}}(j)); \quad (2.48)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\gamma_I I(t_1)}{\rho(t_1)} : \quad (2.49)$$

$$I(t_2) = I(t_1) - 1, V(t_2) = V(t_1) + 1, N_V(t_2) = N_V(t_1) + 1, \quad (2.50)$$

$$j = N_V(t_2), t_{\mathcal{V}}(j) = t_2, \widehat{\Omega}_V(t_2) = \widehat{\Omega}_V(t_1) \cup (t_{\mathcal{V}}(j), \varphi_{\mathcal{V}}(j), \eta_{\mathcal{V}}(j)). \quad (2.51)$$

В соответствии с (2.31), (2.32), компоненты $H(t_2)$, не указанные в (2.43)–(2.51), остаются неизменными.

Зафиксируем $n = 2, 3, \dots$, момент времени t_n и компоненты процесса $H(t_n)$:

$$S(t_n), E(t_n), I(t_n), V(t_n), R(t_n),$$

$$N_E(t_n), \widehat{\Omega}_E(t_n), N_V(t_n), \widehat{\Omega}_V(t_n), N_R(t_n), \widehat{\Omega}_R(t_n). \quad (2.52)$$

Пусть $A = E, V, R$. Исходя из структуры $\widehat{\Omega}_A(t_n)$, имеем, что при $N_A(t_n) \geq 1$ элементы этого семейства таковы, что

$$t_A(1) < t_A(2) < \dots < t_A(N_A(t_n)) \leq t_n.$$

Опираясь на (1.12), будем учитывать только те элементы $\widehat{\Omega}_A(t_n)$, которые удовлетворяют

соотношениям

$$t_n < t_A(1) + \varphi_A(1), t_n < t_A(2) + \varphi_A(2), \dots, t_n < t_A(N_A(t_n)) + \varphi_A(N_A(t_n)),$$

что соответствует неравенству $A(t_n) \geq 1$.

Введем величину $\psi_A^{(n)}$, заданную следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \psi_A^{(n)} &= \min \{t_A(j) + \varphi_A(j) : t_{\mathcal{E}}(A) + \varphi_{\mathcal{E}}(A) > t_n, 1 \leq j \leq N_A(t_n)\} \\ &= t_A(*) + \varphi_A(*), \text{ если } A(t_n) \geq 1, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\psi_A^{(n)} = +\infty, \text{ если } A(t_n) = 0. \quad (2.54)$$

С формулой (2.53) связан единственный элемент $(t_A(*), \varphi_A(*), \eta_A(*))$ из $\widehat{\Omega}_A(t_n)$, на котором достигается равенство $\psi_A^{(n)} = t_A(*) + \varphi_A(*)$. В случае (2.54) элемент $(t_A(*), \varphi_A(*), \eta_A(*))$ не определен. Конечная величина $\psi_A^{(n)}$ задает ближайший к t_n (справа) момент осуществления перехода индивидуума \mathcal{A}^* в одну из когорт, отличных от A , в зависимости от η_A^* .

Введем случайную величину $\xi^{(n)}$ с экспоненциальным распределением

$$\xi^{(n)} \sim \text{Exp}(\rho(t_n)), \quad (2.55)$$

параметр которого имеет вид

$$\rho(t_n) = r_S + \mu_S S(t_n) + \mu_I I(t_n) + \beta_{S,I} S(t_n) I(t_n) + \gamma_I I(t_n). \quad (2.56)$$

Случайная величина $\xi^{(n)}$, заданная (2.55), (2.56), такова, что $t_n + \xi^{(n)}$ определяет ближайший к t_n (справа) момент времени, в который могут происходить изменения компонент $H(t_n)$. Эти возможные изменения обусловлены поступлением индивидуума из когорты G в когорту S , переходами индивидуумов когорты S , I в когорту D , переходом индивидуума из когорты S в когорту E и переходом индивидуума из когорты I в когорту V при условии, что ранее не наступит одно из событий, указанных в описании величин $\psi_E^{(n)}$, $\psi_V^{(n)}$, $\psi_R^{(n)}$ (см. соотношения (2.53), (2.54)).

Положим

$$t_{n+1} = \min \{\psi_E^{(n)}, \psi_V^{(n)}, \psi_R^{(n)}, t_n + \xi^{(n)}\}, \quad (2.57)$$

и предварительно примем, что

$$H(t) = H(t_n), t \in [t_n; t_{n+1}]. \quad (2.58)$$

Соотношение (2.58) дополним изменениями $H(t_n)$ в виде

$$H(t_{n+1}) = H(t_n) + \Delta H(t_n), \quad (2.59)$$

где $\Delta H(t_n)$ понимается как изменение части компонент $H(t_n)$.

Примем, что в формуле (2.57)

$$t_{n+1} = \psi_E^{(n)} = t_{\mathcal{E}}(*) + \varphi_{\mathcal{E}}(*), \quad (2.60)$$

где $(t_{\mathcal{E}}(*), \varphi_{\mathcal{E}}(*), \eta_{\mathcal{E}}^*)$ – элемент $\widehat{\Omega}_E(t_n)$, на котором в (2.53) достигается равенство

$\psi_E^{(n)} = t_E(*) + \varphi_E(*)$. Тогда в (2.58), (2.59) приходим к соотношению

$$E(t_{n+1}) = E(t_n) - 1. \quad (2.61)$$

Пусть $\eta_E(*) \neq 0$. Тогда:

$$\text{если } \eta_E(*) = 1, \text{ то } I(t_{n+1}) = I(t_n) + 1, \quad (2.62)$$

$$\text{если } \eta_E(*) = 2, \text{ то } R(t_{n+1}) = R(t_n) + 1, N_R(t_{n+1}) = N_R(t_n) + 1, \quad (2.63)$$

$$j = N_R(t_{n+1}), t_{\mathcal{R}}(j) = t_{n+1}, \widehat{\Omega}_R(t_{n+1}) = \widehat{\Omega}_R(t_n) \cup (t_{\mathcal{R}}(j), \varphi_{\mathcal{R}}(j), \eta_{\mathcal{R}}(j)). \quad (2.64)$$

В соответствии с (2.58), (2.59), компоненты $H(t_n)$, не указанные в (2.61)–(2.64), остаются неизменными.

Примем, что в формуле (2.57)

$$t_{n+1} = \psi_V^{(n)} = t_V(*) + \varphi_V(*), \quad (2.65)$$

где $(t_V(*), \varphi_V(*), \eta_V(*))$ – элемент $\widehat{\Omega}_V(t_n)$, на котором в (2.53) достигается равенство $\psi_V^{(n)} = t_V(*) + \varphi_V(*)$. Тогда в (2.58), (2.59) приходим к соотношению

$$V(t_{n+1}) = V(t_n) - 1. \quad (2.66)$$

Пусть $\eta_V(*) \neq 0$. Тогда:

$$R(t_{n+1}) = R(t_n) + 1, N_R(t_{n+1}) = N_R(t_n) + 1, \quad (2.67)$$

$$j = N_R(t_{n+1}), t_{\mathcal{R}}(j) = t_{n+1}, \widehat{\Omega}_R(t_{n+1}) = \widehat{\Omega}_R(t_n) \cup (t_{\mathcal{R}}(j), \varphi_{\mathcal{R}}(j), \eta_{\mathcal{R}}(j)). \quad (2.68)$$

В соответствии с (2.58), (2.59), компоненты $H(t_n)$, не указанные в (2.66)–(2.68), остаются неизменными.

Примем, что в формуле (2.57)

$$t_{n+1} = \psi_R^{(n)} = t_{\mathcal{R}}(*) + \varphi_{\mathcal{R}}(*), \quad (2.69)$$

где $(t_{\mathcal{R}}(*), \varphi_{\mathcal{R}}(*), \eta_{\mathcal{R}}(*))$ – элемент $\widehat{\Omega}_R(t_n)$, на котором в (2.53) достигается равенство $\psi_R^{(n)} = t_{\mathcal{R}}(*) + \varphi_{\mathcal{R}}(*)$. Тогда в (2.58), (2.59) приходим к соотношениям

$$R(t_{n+1}) = R(t_n) - 1, \quad (2.70)$$

$$\text{если } \eta_{\mathcal{R}}(*) = 1, \text{ то } S(t_{n+1}) = S(t_n) + 1. \quad (2.71)$$

В соответствии с (2.58), (2.59), компоненты $H(t_n)$, не указанные в (2.70), (2.71), остаются неизменными.

Примем, что в формуле (2.57)

$$t_{n+1} = t_n + \xi^{(n)}. \quad (2.72)$$

Тогда компоненты приращения $\Delta H(t_n)$ задаются вероятностными соотношениями, учитывающими отдельные слагаемые в формуле (2.56). В (2.58), (2.59) приходим к следующим соотношениям:

$$\text{с вероятностью } \frac{r_S}{\rho(t_n)} : S(t_{n+1}) = S(t_n) + 1; \quad (2.73)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_S S(t_n)}{\rho(t_n)} : S(t_{n+1}) = S(t_n) - 1; \quad (2.74)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\mu_I I(t_n)}{\rho(t_n)} : I(t_{n+1}) = I(t_n) - 1; \quad (2.75)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\beta_{S,I} S(t_n) I(t_n)}{\rho(t_n)} : \quad (2.76)$$

$$S(t_{n+1}) = S(t_n) - 1, E(t_{n+1}) = E(t_n) + 1, N_E(t_{n+1}) = N_E(t_n) + 1, \quad (2.77)$$

$$j = N_E(t_{n+1}), t_{\mathcal{E}}(j) = t_{n+1}, \widehat{\Omega}_E(t_{n+1}) = \widehat{\Omega}_E(t_n) \cup (t_{\mathcal{E}}(j), \varphi_{\mathcal{E}}(j), \eta_{\mathcal{E}}(j)); \quad (2.78)$$

$$\text{с вероятностью } \frac{\gamma_I I(t_n)}{\rho(t_n)} : \quad (2.79)$$

$$I(t_{n+1}) = I(t_n) - 1, V(t_{n+1}) = V(t_n) + 1, N_V(t_{n+1}) = N_V(t_n) + 1, \quad (2.80)$$

$$j = N_V(t_{n+1}), t_{\mathcal{V}}(j) = t_{n+1}, \widehat{\Omega}_V(t_{n+1}) = \widehat{\Omega}_V(t_n) \cup (t_{\mathcal{V}}(j), \varphi_{\mathcal{V}}(j), \eta_{\mathcal{V}}(j)). \quad (2.81)$$

В соответствии с (2.58), (2.59), компоненты $H(t_n)$, не указанные в (2.73)–(2.81), остаются неизменными.

Если $t_{n+1} \geq T_{mod}$, то завершаем описание процесса $H(t)$. Если $t_{n+1} < T_{mod}$, то заменяем t_n на t_{n+1} , фиксируем компоненты $H(t_{n+1})$, находим момент времени t_{n+2} , применяя (2.52)–(2.57) и, используя t_{n+2} , $H(t_{n+1})$ и повторяя процедуру, заданную формулами (2.58)–(2.81), находим $H(t_{n+2})$.

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для получения реализаций процесса $H(t)$ применяется метод Монте-Карло. В начале вычислений фиксируется промежуток $[0; T_{mod}]$, задаются параметры модели и начальные данные. Задается константа $\psi_{\infty} > T_{mod}$, используемая в (2.54) вместо символа « $+\infty$ ». Далее моделируется последовательность (2.6), опирающаяся на рекуррентные соотношения (2.9)–(2.81). Моделирование конкретной реализации останавливается, когда $t_{n+1} \geq T_{mod}$. Моделирование процесса $H(t)$ завершается при получении заданного количества реализаций.

Для генерации возникающих в алгоритме случайных величин используются формулы и датчики псевдослучайных чисел, описанные в [12]–[14]. Для формирования и поддержания каждого из семейств $\widehat{\Omega}_A(t)$ применяются методы работы с конечными наборами данных, оптимизированными под задачи включения новых элементов в семейство $\widehat{\Omega}_A(t_n)$, поиска и исключения из $\widehat{\Omega}_A(t_n)$ элементов, которые далее не используются в нахождении минимального значения $\psi_A^{(n)}$ (см. формулу (2.53)).

Алгоритм моделирования реализован в виде консольной моделирующей программы, написанной на языке программирования C++ в интегрированной среде разработки Visual Studio 2008. Входные параметры считываются из специального конфигурационного файла. Результаты моделирования (значения переменных модели) сохраняются в отдельный текстовый файл.

Ниже приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма с формированием и поддержанием семейства $\widehat{\Omega}_A(t)$, $A = E, V, R$. Примем, что распределение F_{ω_A} является дискретным:

$$\omega_A = \omega_i = const > 0 \text{ с вероятностью } 0 \leq p_i \leq 1, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Семейство $\widehat{\Omega}_A(t)$ представим в виде набора подсемейств

$$\widehat{\Omega}_A^{(1)}(t), \dots, \widehat{\Omega}_A^{(k)}(t), \widehat{\Omega}_A^{(0)}(t).$$

Пусть индивидум \mathcal{A} поступил в когорту A в момент времени $t_{\mathcal{A}}$. Генерируем случайную величину $\xi_{\mathcal{A}} \sim \text{Exp}(\mu_{\mathcal{A}})$ и не зависящую от нее случайную величину $\omega_{\mathcal{A}}$, принимающую значение ω_m при некотором $1 \leq m \leq k$. Если $\xi_{\mathcal{A}} \leq \omega_{\mathcal{A}} = \omega_m$, то \mathcal{A} «зачисляется» в подсемейство $\widehat{\Omega}_A^{(0)}(t)$, и его уникальный тип задается величиной $t_{\mathcal{A}} + \xi_{\mathcal{A}}$, означающей момент перехода \mathcal{A} в когорту D . Если $\xi_{\mathcal{A}} > \omega_{\mathcal{A}} = \omega_m$, то \mathcal{A} «зачисляется» в подсемейство $\widehat{\Omega}_A^{(m)}(t)$, и его уникальный тип задается величиной $t_{\mathcal{A}} + \omega_m$, означающей момент перехода \mathcal{A} в когорту, отличную от D . Отсюда следует, что, в отличие от $\widehat{\Omega}_A^{(0)}(t)$, подсемейство $\widehat{\Omega}_A^{(m)}(t)$ формируется по принципу «первым пришел – первым ушел». Если принять, что $\mu_{\mathcal{A}}^{-1}$ существенно больше $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, то вероятность «зачисления» \mathcal{A} в подсемейство $\widehat{\Omega}_A^{(0)}(t)$ будет очень мала. В этом случае поиск элементов, указанных в (2.53), исключение «лишних» элементов из $\widehat{\Omega}_A(t)$, равно как и пополнение $\widehat{\Omega}_A(t)$ новыми элементами, сводится к относительно простой и нетрудоёмкой вычислительной процедуре.

4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ

4.1. Динамика численности когорт при отсутствии инфекции. Примем, что $I^{(0)} = 0$, т.е. инфекция в регионе отсутствует, поскольку с учетом начального состояния (2.7), (2.8) переменных модели нет первоначальных источников заражения индивидуумов когорты S . Тогда изменение $S(t)$ обусловлено только двумя событиями: приток индивидуумов из когорты G в когорту S с интенсивностью r_S и переход индивидуумов когорты S в когорту D с интенсивностью μ_S . Динамика $S(t)$ при $t > 0$ может быть описана в терминах процесса рождения и гибели [15] (гл. 7, п. 4, 6). В частности, $X_S(t) = \mathbf{E}S(t)$ – математическое ожидание $S(t)$ находится как решение дифференциального уравнения с заданным начальным условием:

$$X_S(0) = S^{(0)}, \quad \frac{dX_S(t)}{dt} = r_S - \mu_S X_S(t), \quad t > 0. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что

$$X_S(t) = (S^{(0)} - S^{(*)})e^{-\mu_S t} + S^{(*)}, \quad t \geq 0, \quad \text{где } S^{(*)} = \frac{r_S}{\mu_S}. \quad (4.2)$$

По аналогии с исследованием модели, приведенной в [16], получаем, что закон распределения $S(t)$ при $t > 0$ задается распределением Пуассона с параметром $X_S(t)$, указанным в (4.2). Если в (4.2) $S^{(0)} = S^{(*)}$, то для каждого $t \in (0; \infty)$ $S(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $S^{(*)}$. Пусть $S^{(0)} \neq S^{(*)}$. Поскольку $X_S(t) \rightarrow S^{(*)}$ при $t \rightarrow +\infty$, то $S(t)$ будет иметь асимптотически Пуассоновское распределение с параметром $S^{(*)}$.

4.2. Оценка асимптотического распределения суммарной численности когорт. Примем, что $I^{(0)} > 0$. Каждый индивидуум из когорты $M = S \cup E \cup I \cup V \cup R$ имеет случайную длительность пребывания в когорте с конечным математическим ожиданием. Наличие в исходной модели контактов индивидуумов когорт S и I делает указанные распределения зависимыми от истории развития этих когорт. Вместе с тем, можно предложить ряд различных построений на одном вероятностном

пространстве явных нижних и верхних оценок для длительности пребывания каждого из индивидуумов в когорте M . Построение нижних и верхних оценок на одном вероятностном пространстве означает, что берется случайная история превращений, гибели или миграционного оттока индивидуума в когорте M , и все стадии этой эволюции могут одновременно либо уменьшаться, либо увеличиваться по выбранным правилам. Пусть m_1, m_2 – математические ожидания длительностей пребывания индивидуумов когорты M в рамках указанных нижних и верхних оценок. В терминах теории массового обслуживания когорту M можно считать системой массового обслуживания с бесконечным числом обслуживающих каналов, входящим потоком заявок интенсивности r_S и средним временем обслуживания m_1 или m_2 .

Обозначим через $M(t)$ численность когорты M в момент времени t . Используя [17], получаем, что в первом случае $M(t) = M_1(t)$ имеет асимптотически Пуассоновское распределение с параметром $r_S m_1$, а во втором $M(t) = M_2(t)$ – с параметром $r_S m_2$. Для каждого фиксированного $t > 0$ случайная величина $M(t)$, рассматриваемая в исходной модели, имеет конечное математическое ожидание, и можно считать, что $M(t)$ заключена между случайными величинами $M_1(t), M_2(t)$.

4.3. Формула для коэффициента распространения инфекции. Примем, что инфекция распространяется среди населения крупного по численности $S^{(0)}$ региона, а начальная численность заразных индивидуумов $I^{(0)}$ относительно мала, т.е. $I^{(0)}/S^{(0)} \ll 1$. Здесь естественно ожидать уменьшение $S(t)$ и определенный рост $E(t), I(t)$, а потом и возможное снижение $E(t), I(t)$ на некотором промежутке времени. Возникает вопрос об условиях, при которых когорты E, I могут исчезнуть (эпидемический процесс может завершиться) в течение относительно короткого промежутка времени. Для изучения этого вопроса примем, что в исходной модели численность когорты S является неизменной и фиксирована на уровне $[S^{(*)}]$, где под $[S^{(*)}]$ понимается целая часть числа $S^{(*)}$, указанного в (4.2). Не будем учитывать когорту R , пополняющую когорту S , и когорту V , пополняющую когорту R . Оставим только индивидуумов когорты E, I .

Перейдем от процесса $H(t)$ к вспомогательному ветвящемуся процессу с частицами двух типов – E, I и оценим его параметр критичности, характеризующий возможность снижения или роста $E(t), I(t)$ на некотором начальном промежутке времени $[0; T_0] \subset [0; T_{mod}]$. Параметр критичности вспомогательного ветвящегося процесса существенно зависит от параметров и распределений случайных величин исходной модели.

Предварительно приведем формальное описание процессов Севастьянова с двумя типами частиц [18] (гл. 8). Затем согласуем формальное описание с изучаемой моделью. Обозначим условные ветвящиеся процессы с двумя типами частиц, начинающиеся с одной частицы первого или второго типа, через

$$Z^{(i)}(t) = (Z_1^{(i)}(t), Z_2^{(i)}(t)) = ((Z_1(t), Z_2(t)) | (Z_1(0), Z_2(0)) = (\delta_{1,i}, \delta_{2,i})), \quad i = 1, 2,$$

где $t \in [0; \infty)$ и $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера. Полагаем, что эволюция частиц происходит независимо от поведения остальных частиц. Частицы первого и второго типов живут случайное время с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, $x \in [0; \infty)$, соответственно. При гибели частица порождает потомство с распределением, зависящим от ее возраста и типа. Формально распределение численности потомства частицы i -го типа, гибнущей в возрасте x , задается производящей функцией $h_i(t; s_1, s_2)$, $s_i \in [0; 1]$, $i = 1, 2$. Пусть далее $s = (s_1, s_2)$.

Обозначим производящие функции условных ветвящихся процессов через

$$F_i(t; s) = \mathbf{E} s_1^{Z_1^{(i)}(t)} s_2^{Z_2^{(i)}(t)}, \quad i = 1, 2.$$

Из [18] (гл. 8) получаем, что производящие функции процесса удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$F_i(t; s) = \int_0^t h_i(t; F_1(t-u; s), F_2(t-u; s)) dF_i(u) + s_i(1 - F_i(t)), \quad i = 1, 2. \quad (4.3)$$

Обозначим $\Delta_x = [x, x + \Delta)$, а для произвольной функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ положим $\Delta F_\xi(x) = P(\xi \in \Delta_x)$.

В рамках исследуемой модели положим, что $\xi_1 = \min\{\xi_E, \omega_E\}$ – продолжительность жизни частицы первого типа, а распределение ξ_1 обозначим через

$$F_{\xi_1}(x) = P(\xi_1 < x) = 1 - (1 - F_{\xi_E}(x))(1 - F_{\omega_E}(x)).$$

В конце своей жизни частица первого типа либо сразу гибнет, либо не гибнет, но проходит через дополнительный фильтр: с вероятностью q_I порождает одну частицу второго типа, а с вероятностью $q_R = 1 - q_I$ уходит из популяции. Поэтому можно записать соотношение $h_1(t; s_1, s_2) = p_{1,0}(t) + p_{1,1}(t)s_2$, где

$$\begin{aligned} p_{1,1}(t) &= q_I P(\xi_E > \xi_1 | \xi_1 = t) = q_I \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{P(\xi_E > \xi_1; \xi_1 \in \Delta_t)}{P(\xi_1 \in \Delta_t)} \\ &= q_I \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{P(\xi_E > t; t < \omega_E < t + \Delta)}{P(\xi_1 \in \Delta_t)} = q_I \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{(1 - F_{\xi_E}(t))\Delta F_{\omega_E}(t)}{\Delta F_{\xi_1}(t)}, \\ p_{1,0}(t) &= 1 - p_{1,1}(t). \end{aligned}$$

Исходя из приведенных выше соотношений и опуская детали, можно получить следующий результат.

Утверждение. Пусть имеются две независимые случайные величины ω_E и ξ_E с функциями распределения $F_{\omega_E}(x)$ и $F_{\xi_E}(x)$. Положим, что $\xi_1 = \min\{\xi_E, \omega_E\}$ – случайная величина с функцией распределения $F_1(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta F_1(x) &= P(\xi_1 \in \Delta_x) = \Delta F_{\xi_E}(x)(1 - F_{\omega_E}(x)) + (1 - F_{\xi_E}(x))\Delta F_{\omega_E}(t); \\ P(\omega_E < \xi_E) &= \int_0^\infty F_{\omega_E}(x) dF_{\xi_E}(x) = \int_0^\infty (1 - F_{\xi_E}(x)) dF_{\omega_E}(x) = \tilde{p}_{1,1}. \end{aligned}$$

Если $\xi_I \sim \text{Exp}(\mu_I)$, а $\omega_E > 0$ – постоянная, то

$$p_{1,1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \omega_E, \\ q_I e^{-\mu_I \omega_E} & \text{при } t = \omega_E. \end{cases}$$

Если $\xi_I \sim \text{Exp}(\mu_I)$, а ω_E абсолютно непрерывна с плотностью $f_{\omega_E}(x)$, то

$$p_{1,1}(t) = \frac{q_I e^{-\mu_I t} f_{\omega_E}(t)}{\mu_I e^{-\mu_I t} (1 - F_{\omega_E}(t)) + e^{-\mu_I t} f_{\omega_E}(t)} = \frac{q_I f_{\omega_E}(t)}{\mu_I (1 - F_{\omega_E}(t)) + f_{\omega_E}(t)}.$$

Частица второго типа либо гибнет, либо порождает по одной частице первого и второго типа. Поэтому для производящей функции численности потомства верно соотношение $h_2(t; s_1, s_2) = p_{2,0}(t) + p_{2,2}(t)s_1s_2$. Учитывая марковость трех превращений, определяющих данное превращение, производящая функция не зависит от времени и

имеет вид

$$h_2(t; s_1, s_2) \equiv h_2(s_1, s_2) = p_{2,0} + p_{2,2}s_1s_2 \\ = \frac{\mu_I + \gamma_I}{\mu_I + \gamma_I + \beta_{S,I}[S^{(*)}]} + \frac{\beta_{S,I}[S^{(*)}]}{\mu_I + \gamma_I + \beta_{S,I}[S^{(*)}]} s_1s_2.$$

Мы определили в явном виде все компоненты в системе (4.3), и ее можно записать с учетом используемых в модели параметров и законов распределения. Для нас не принципиален явный вид распределения ветвящегося процесса $Z^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, а важна классификация исследуемого процесса на критичность, т.е. экспоненциальный рост или убывание средней численности компонент процесса, или асимптотическое постоянство этих средних.

Из [18] (гл. 8) следует, что параметр критичности ветвящегося процесса является максимальным собственным числом матрицы $(a_{i,j})_{i,j=1,2}$, где

$$a_{i,j}(t) = \left. \frac{\partial h_i(t; s_1, s_2)}{\partial s_j} \right|_{s=1}; \quad a_{i,j} = \int_0^\infty a_{i,j}(t) dF_i(t).$$

Приведем явный вид матрицы $(a_{i,j})_{i,j=1,2}$ для нашего процесса. Условные средние для средней численности потомства равны

$$a_{1,1}(t) = 0; \quad a_{1,2}(t) = p_{1,1}(t); \quad a_{2,2}(t) = a_{2,1}(t) \equiv p_{2,2}.$$

Из безусловных средних необходимо вычислить только $a_{1,2}$, а остальные не зависели от продолжительности жизни частиц и сохраняют значения $a_{1,1} = 0$ и $a_{2,2} = a_{2,1} = p_{2,2}$. В общем случае для произвольных распределений ω_E и ξ_E из выражения для $p_{1,1}(t)$ находим, что

$$a_{1,2} = \int_0^\infty p_{1,1}(t) dF_1(t) = q_I \int_0^\infty (1 - F_{\xi_E}(t)) dF_{\omega_E}(t) = q_I \tilde{p}_{1,1},$$

а при $\xi_E \sim Exp(\mu_E)$, полагая $p_E = \int_0^\infty e^{-\mu_E t} dF_{\omega_E}(t)$, получаем

$$a_{1,2} = q_I \int_0^\infty e^{-\mu_E t} dF_{\omega_E}(t) = q_I p_E.$$

Вычислим Перронов корень λ_{max} матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} \\ p_{2,2} & p_{2,2} \end{pmatrix},$$

используя характеристическое уравнение для собственных чисел

$$\lambda^2 - p_{2,2}\lambda - p_{2,2}a_{1,2} = 0. \tag{4.4}$$

Находим, что

$$\lambda_{max} = 0.5 \left(p_{2,2} + \sqrt{p_{2,2}^2 + 4p_{2,2}a_{1,2}} \right). \tag{4.5}$$

Ветвящийся процесс будет докритическим, критическим, надкритическим при

$$\lambda_{max} < 1, \quad \lambda_{max} = 1, \quad \lambda_{max} > 1. \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.5) видно, что соотношения (4.6) имеют место соответственно в случаях

$$p_{2,2}(1 + a_{1,2}) < 1, p_{2,2}(1 + a_{1,2}) = 1, p_{2,2}(1 + a_{1,2}) > 1. \quad (4.7)$$

Обозначим

$$R_0^{(*)} = \frac{q_I p_E \beta_{S,I} [S^{(*)}]}{\gamma_I + \mu_I}. \quad (4.8)$$

Преобразуя (4.7), имеем следующий результат: если

$$R_0^{(*)} < 1, R_0^{(*)} = 1, R_0^{(*)} > 1, \quad (4.9)$$

то изучаемый ветвящийся процесс с частицами двух типов является соответственно докритическим, критическим и надкритическим.

В приложении к исходной модели константу $R_0^{(*)}$, заданную (4.8), назовем коэффициентом распространения инфекции при фиксированном начальном значении $[S^{(*)}]$ численности когорты S . Константа $R_0^{(*)}$ интерпретируется как среднее число новых зараженных индивидуумов в расчете на одного имеющегося заразного индивидуума за среднее время $1/(\mu_I + \gamma_I)$ его пребывания в когорте I при условии, что численность когорты S составляет $[S^{(*)}]$ индивидуумов. Заметим, что выражение для $R_0^{(*)}$ содержит только часть параметров модели. Результаты работы [9] показывают, что для $R_0^{(*)}$, найденного в рамках модели из [9], соотношения вида (4.9) в сочетании с вариацией параметров, не входящих в $R_0^{(*)}$, приводят к разнообразным вариантам динамики эпидемического процесса.

Исходя из описания модели, получаем, что на промежутке времени $[0; T_0]$ численность когорты S будет снижаться. Поэтому результаты исследования ветвящегося процесса носят локальный по времени характер. Если принять, что $R_0^{(*)} > 1$ и заменить $[S^{(*)}]$ на $S(T_0) = S^{(**)} = const < [S^{(*)}]$, то может оказаться, что

$$R_0^{(**)} = \frac{q_I p_E \beta_{S,I} S^{(**)}}{\gamma_I + \mu_I} < 1. \quad (4.10)$$

Следовательно, при выполнении (4.10) описанный выше ветвящийся процесс с частицами двух типов, рассматриваемый на достаточно коротком промежутке времени $[T_0; T_1] \subset [0; T_{mod}]$, будет докритическим.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Целью вычислительных экспериментов с моделью является оценка вероятности завершения эпидемического процесса в течение конечного промежутка времени $[0; T_{mod}]$ при условии, что $I^{(0)} > 0$. Полагаем, что эпидемический процесс завершился в момент времени $t \in [0; T_{mod}]$, если выполнено соотношение

$$I(t) + E(t) = 0, \quad (5.1)$$

т.е. суммарная численность когорт I и E обратилась в ноль в момент времени t , и, как следствие, в регионе отсутствует источник заражения индивидуумов когорты S . Вероятность наступления события (5.1) в некоторый момент времени $t \in [0; T_{mod}]$ обозначим через $P_0(t) = P(I(t) + E(t) = 0)$.

Для иллюстрации переходных режимов в динамике эпидемического процесса в каждом из вычислительных экспериментов представлены интервальные оценки математического ожидания $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ и приведены по десять типичных реализаций

вспомогательной переменной $J(t) = \log_{10}(I(t) + E(t) + 1)$. Отметим, что в силу используемой функциональной связи соотношение (5.1) равносильно тому, что $J(t) = 0$. Вероятность $P_0(t)$ и математическое ожидание $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ оценивались по выборке из 100 реализаций моделируемого случайного процесса. Для построения интервальных оценок $P_0(t)$, $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ применялись формулы математической статистики для выборок большого объема [19].

Во всех вычислительных экспериментах использовался фиксированный набор части параметров и законов распределения (базовый набор). Остальная часть параметров и законов распределения приведена в каждом из экспериментов. Всюду ниже в скобках указана размерность параметров. Базовый набор параметров и законов распределения таков. Константы:

$$r_S = 75, \quad \mu_S = \mu_E = \mu_R = 1/18250, \quad \mu_V = \mu_I = 1/15750, \quad \gamma_I = 0.1 \quad (\text{сутки}^{-1}),$$

$$T_{mod} = 2000 \text{ (сутки)}, \quad q_R = 0.3, \quad q_I = 0.7.$$

Принято, что случайная величина ω_V имеет распределение, сосредоточенное в точке $\omega_V = 21$ (сутки). Случайная величина ω_E задается дискретным распределением:

$$\omega_E = \omega_i^{(E)} \text{ с вероятностью } p_i^{(E)}, \quad 1 \leq i \leq 7, \text{ где}$$

$$\omega_1^{(E)} = 8, \quad \omega_2^{(E)} = 9, \quad \omega_3^{(E)} = 10, \quad \omega_4^{(E)} = 11, \quad \omega_5^{(E)} = 12, \quad \omega_6^{(E)} = 13, \quad \omega_7^{(E)} = 14 \text{ (сутки)},$$

$$p_1^{(E)} = p_2^{(E)} = 0.05, \quad p_3^{(E)} = 0.15, \quad p_4^{(E)} = 0.35, \quad p_5^{(E)} = 0.25, \quad p_6^{(E)} = 0.1, \quad p_7^{(E)} = 0.05.$$

В каждом из вычислительных экспериментов начальная численность когорты S такова, что $S^{(0)} = [S^{(*)}] = 1368750$, начальная численность когорты I задается с помощью целочисленных констант $I^{(0)} > 0$, начальные численности остальных когорт равны нулю.

Эксперимент 1. Используется базовый набор параметров, $\beta_{S,I} = 8.9 \cdot 10^{-8}$ (сутки⁻¹), случайная величина ω_R имеет дискретное распределение:

$$\omega_R = \omega_i^{(R)} \text{ с вероятностью } p_i^{(R)} = 1/7, \quad 1 \leq i \leq 7, \text{ где}$$

$$\omega_1^{(R)} = 90, \quad \omega_2^{(R)} = 110, \quad \omega_3^{(R)} = 130, \quad \omega_4^{(R)} = 150,$$

$$\omega_5^{(R)} = 170, \quad \omega_6^{(R)} = 190, \quad \omega_7^{(R)} = 210 \text{ (сутки)}.$$

В этом случае коэффициент распространения инфекции $R_0^{(*)} = 0.85$.

Вычисления проводились для различной начальной численности инфицированных индивидуумов: $I^{(0)} = 10$; $I^{(0)} = 50$; $I^{(0)} = 100$; $I^{(0)} = 200$.

Вычисления показывают, что вероятность завершения эпидемического процесса для различных $I^{(0)}$ такова:

- для $I^{(0)} = 10$ вероятность $P_0(800) = 1$ (все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 800$ суток);
- для $I^{(0)} = 50$ вероятность $P_0(1100) = 1$ (все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 1100$ суток);
- для $I^{(0)} = 100$ вероятность $P_0(1600) = 1$ (все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 1600$ суток);
- для $I^{(0)} = 200$ вероятность $P_0(1400) = 1$ (все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 1400$ суток);

переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 1400$ суток).

В таблице 1 приведены интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для различных $I^{(0)}$. На рис. 2 представлены десять типичных реализаций переменной $J(t)$ для различных $I^{(0)}$.

Таблица 1. Интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для различных $I^{(0)}$ в эксперименте 1

t , сутки	$\mathbf{E}(I(t) + E(t))$			
	$I^{(0)} = 10$	$I^{(0)} = 50$	$I^{(0)} = 100$	$I^{(0)} = 200$
0	10	50	100	200
100	6.01 ± 0.44	27.58 ± 0.94	56.78 ± 1.36	113.71 ± 1.93
300	1.44 ± 0.28	6.41 ± 0.58	13.26 ± 0.86	26.01 ± 1.19
500	0.32 ± 0.14	1.44 ± 0.28	3.44 ± 0.46	5.78 ± 0.56
800	0	0.27 ± 0.15	0.31 ± 0.12	0.69 ± 0.26
1100	0	0	0.07 ± 0.06	0.14 ± 0.12
1400	0	0	0.03 ± 0.01	0
1600	0	0	0	0

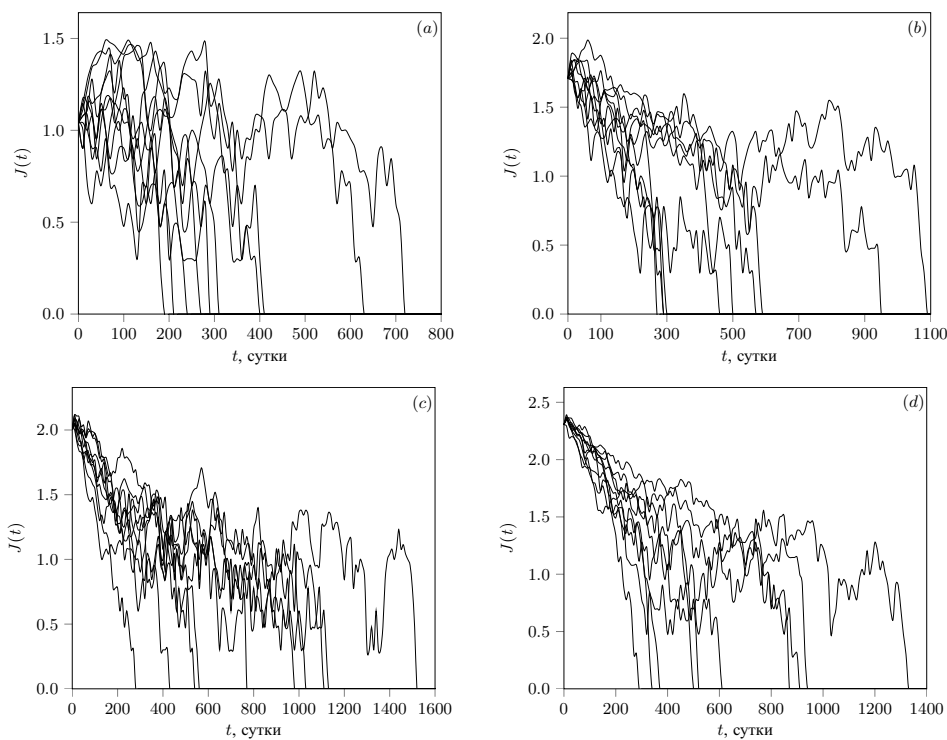


Рис. 2. Эксперимент 1: типичные реализации переменной $J(t)$ для различных $I^{(0)}$: (a) $I^{(0)} = 10$, (b) $I^{(0)} = 50$, (c) $I^{(0)} = 100$, (d) $I^{(0)} = 200$.

Из таблицы 1 и рисунка 2 видно, что при выполнении неравенства $R_0^{(*)} < 1$ эпидемический процесс завершается для всех приведенных выше $I^{(0)}$, отличие заключается лишь в продолжительности промежутка времени до завершения эпидемии.

Эксперимент 2. В этом эксперименте используется набор параметров из эксперимента 1, за исключением $\beta_{S,I} = 2 \cdot 10^{-7}$ (сутки⁻¹). Коэффициент распространения инфекции $R_0^{(*)} = 1.91$. Начальная численность когорты I такова, что $I^{(0)} = 10$. Вычисления показывают, что $P_0(T_{mod}) = 0$ (ни одна из моделируемых реализаций переменной $J(t)$ не обратилась в ноль к моменту времени $t = T_{mod}$).

Опираясь на (4.8), (4.10), введем константу

$$\widehat{S} = \frac{\gamma_I + \mu_I}{q_I p_E \beta_{S,I}}. \quad (5.2)$$

Если в (4.8), (4.10) вместо $[S^{(*)}]$, $S^{(**)}$ подставить \widehat{S} из (5.2), то окажется, что $R_0^{(*)} = R_0^{(**)} = 1$. Получаем, что \widehat{S} определяет такой уровень численности когорты S , при котором колебания $S(t)$ относительно \widehat{S} приводят к колебаниям нормированной переменной

$$R_{S,0}(t) = \frac{S(t)}{\widehat{S}}, \quad t \in [0; T_{mod}], \quad (5.3)$$

относительно единицы.

В таблице 2 приведены интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$, $\mathbf{E}R_{S,0}(t)$ на уровне доверия 0.95. На рисунке 3 представлены десять типичных реализаций переменных $J(t)$ и $S(t)$. Пунктирной линией обозначена константа \widehat{S} .

Таблица 2. Интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$, $\mathbf{E}R_{S,0}(t)$ на уровне доверия 0.95 для эксперимента 2

t , сутки	$\mathbf{E}(I(t) + E(t))$	$\mathbf{E}R_{S,0}(t)$
0	10	1.91
400	60879.27 ± 5512.63	0.61 ± 0.01
800	26982.13 ± 1411.25	0.88 ± 0.02
1200	42653.36 ± 1471.96	1.22 ± 0.01
1600	91678.22 ± 2092.42	1.12 ± 0.01
2000	74641.07 ± 1881.88	0.86 ± 0.01

Рисунок 3,а (см. также таблицу 2) показывает, что реализации $J(t)$ имеют форму затухающих колебаний. Из рис. 3,б видно, что типичные реализации $S(t)$, осциллируя, выходят на некоторый стационарный уровень, причем колебания совершаются относительно уровня \widehat{S} .

Эксперимент 3. В данном эксперименте набор параметров такой же, как в эксперименте 1, но еще более увеличен параметр $\beta_{S,I}$, а именно: $\beta_{S,I} = 5.5 \cdot 10^{-7}$ (сутки⁻¹). Для указанного набора параметров $R_0^{(*)} = 5.26$. Начальная численность когорты I такова, что $I^{(0)} = 10$. Вычисления показывают, что $P_0(T_{mod}) = 0$ (ни одна из моделируемых реализаций переменной $J(t)$ не обратилась в ноль к моменту времени $t = T_{mod}$). В таблице 3 представлены интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне

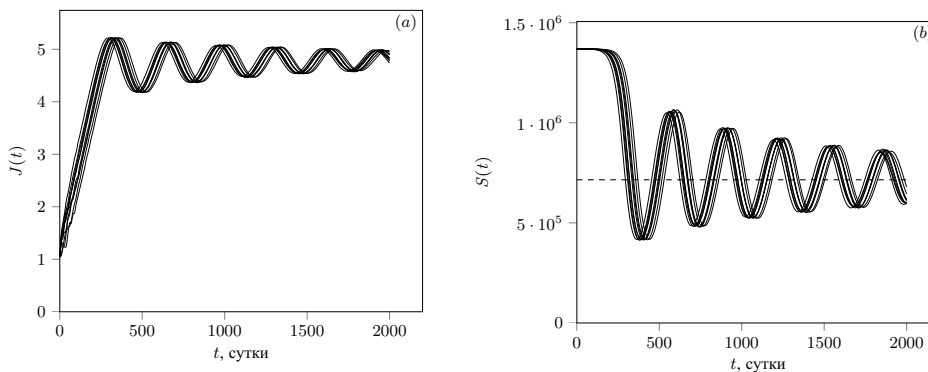


Рис. 3. Эксперимент 2: типичные реализации переменных $J(t)$ (а) и $S(t)$ (б).

доверия 0.95 для этого случая. На рисунке 4 приведены десять типичных реализаций переменной $J(t)$.

Из таблицы 3 и рисунка 4 следует, что типичные реализации $J(t)$ имеют форму незатухающих колебаний, образуя так называемые волны эпидемии, при которых происходит циклическое увеличение количества инфицированных индивидуумов с последующим снижением.

Таблица 3. Интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для эксперимента 3

t , сутки	$\mathbf{E}(I(t) + E(t))$
0	10
400	522468.96 ± 8897.59
800	622.50 ± 22.14
1200	316017.45 ± 19796.33
1600	1070.61 ± 52.43
2000	122210.78 ± 13756.83

Эксперимент 4. В четвертом эксперименте варьировались вероятности $p_i^{(R)}$, но значения $\omega_i^{(R)}$ оставались прежними, $1 \leq i \leq 7$, т.е.

$$\omega_1^{(R)} = 90, \quad \omega_2^{(R)} = 110, \quad \omega_3^{(R)} = 130, \quad \omega_4^{(R)} = 150,$$

$$\omega_5^{(R)} = 170, \quad \omega_6^{(R)} = 190, \quad \omega_7^{(R)} = 210 \text{ (сутки)}.$$

Использовались три варианта значений вероятностей $p_i^{(R)}$, $1 \leq i \leq 7$.

Вариант 1:

$$p_1^{(R)} = 0.01, \quad p_2^{(R)} = 0.02, \quad p_3^{(R)} = 0.02, \quad p_4^{(R)} = 0.1,$$

$$p_5^{(R)} = 0.2, \quad p_6^{(R)} = 0.3, \quad p_7^{(R)} = 0.35;$$

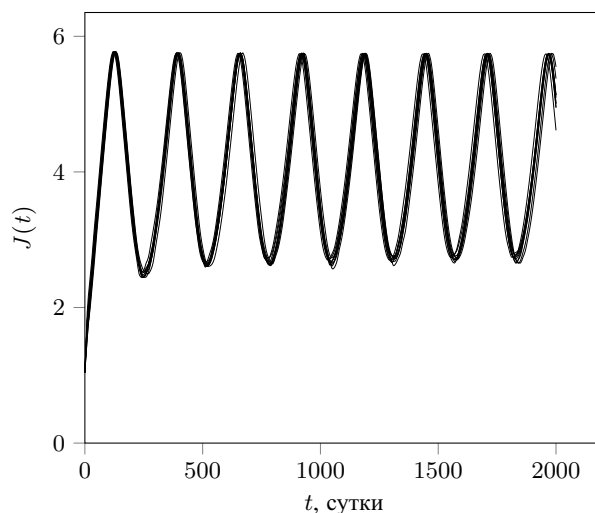


Рис. 4. Эксперимент 3: типичные реализации переменной $J(t)$.

Вариант 2:

$$p_1^{(R)} = 0.01, \quad p_2^{(R)} = 0.02, \quad p_3^{(R)} = 0.02, \quad p_4^{(R)} = 0.05,$$

$$p_5^{(R)} = 0.2, \quad p_6^{(R)} = 0.3, \quad p_7^{(R)} = 0.4;$$

Вариант 3:

$$p_1^{(R)} = 0.01, \quad p_2^{(R)} = 0.02, \quad p_3^{(R)} = 0.02, \quad p_4^{(R)} = 0.02,$$

$$p_5^{(R)} = 0.01, \quad p_6^{(R)} = 0.1, \quad p_7^{(R)} = 0.82.$$

Приведенные варианты соответствуют последовательному увеличению вероятностей более длительного периода поддержания иммунитета. Все остальные параметры и $I^{(0)}$ такие же, как в эксперименте 3. Коэффициент распространения инфекции также как в эксперименте 3 сохраняет свое значение $R_0^{(*)} = 5.26$. В таблице 4 приведены интервальные оценки вероятности завершения эпидемического процесса $P_0(t)$ для различных t в вариантах 1–3.

Таблица 4. Интервальные оценки $P_0(t)$ на уровне доверия 0.95 для вариантов 1–3 в эксперименте 4

t , сутки	$P_0(t)$		
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
500	0.18 ± 0.07	0.18 ± 0.07	0.69 ± 0.09
1000	0.45 ± 0.09	0.56 ± 0.09	0.88 ± 0.06
1500	0.60 ± 0.09	0.78 ± 0.08	0.97 ± 0.02
2000	0.69 ± 0.09	0.87 ± 0.06	1

Таблица 4 показывает, что при более длительном периоде поддержания иммунитета

(при возрастании $p_7^{(R)}$) вероятность завершения эпидемического процесса $P_0(T_{mod})$ увеличивается от нуля (эксперимент 3) до единицы (эксперимент 4, вариант 3, все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = T_{mod}$).

В таблице 5 представлены интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для вариантов 1–3.

Таблица 5. Интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для эксперимента 4

t , сутки	$\mathbf{E}(I(t) + E(t))$		
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
0	10	10	10
500	158225.97 ± 29150.62	192416.65 ± 33357.18	143744.72 ± 43813.64
1000	4.75 ± 1.14	3.29 ± 1.02	4.05 ± 2.98
1500	136640.99 ± 42614.15	39428.00 ± 22075.41	153.23 ± 108.60
2000	22.70 ± 20.52	1949.50 ± 1506.16	0

На рисунке 5 представлены типичные реализации переменной $J(t)$ в вариантах 1–3.

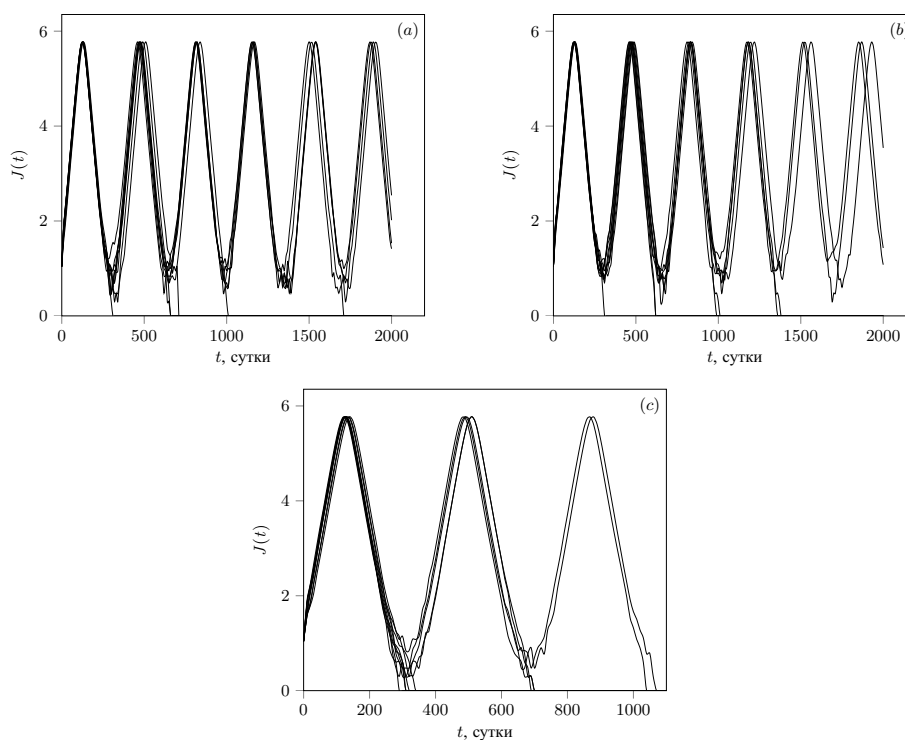


Рис. 5. Эксперимент 4: типичные реализации переменной $J(t)$ в варианте 1 (а), в варианте 2 (б) и в варианте 3 (с).

Таблица 5 и рисунок 5 показывают схожую с экспериментом 3 динамику реализаций $J(t)$, однако здесь амплитуда колебаний значительно выше. Кроме того, в варианте 1 (рис. 5,а) и в варианте 2 (рис. 5,б) значительная часть реализаций после

нескольких волн эпидемии зануляется, а в варианте 3 (рис. 5,с) таковыми являются все реализации, т.е. эпидемический процесс завершается после трех волн развития эпидемии.

Эксперимент 5. В этом эксперименте набор параметров и $I^{(0)}$ совпадают с набором из эксперимента 4 с учетом варианта 3, за исключением значений случайной величины $\omega_i^{(R)}$, $1 \leq i \leq 7$:

$$\begin{aligned} \omega_1^{(R)} &= 90, & \omega_2^{(R)} &= 130, & \omega_3^{(R)} &= 170, & \omega_4^{(R)} &= 210, \\ \omega_5^{(R)} &= 250, & \omega_6^{(R)} &= 290, & \omega_7^{(R)} &= 330 \text{ (сутки)}, \\ p_1^{(R)} &= 0.01, & p_2^{(R)} &= 0.02, & p_3^{(R)} &= 0.02, & p_4^{(R)} &= 0.02, \\ p_5^{(R)} &= 0.01, & p_6^{(R)} &= 0.1, & p_7^{(R)} &= 0.82. \end{aligned}$$

Приведенные значения $\omega_i^{(R)}$ означают, что длительность периода поддержания иммунитета существенно увеличена по сравнению с экспериментом 4, вариант 3. Здесь, как и ранее, $R_0^{(*)} = 5.26$. В таблице 6 представлены интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для этого набора параметров.

Таблица 6. Интервальные оценки $\mathbf{E}(I(t) + E(t))$ на уровне доверия 0.95 для эксперимента 5

t , сутки	$\mathbf{E}(I(t) + E(t))$
0	10
100	160330.58 ± 7275.49
150	212819.66 ± 10054.14
200	2666.75 ± 155.79
250	39.64 ± 2.68
300	1.39 ± 0.32
500	0

На рисунке 6 приведены десять типичных реализаций переменных $J(t)$. Для этого случая вероятность завершения эпидемического процесса $P_0(500) = 1$ (все моделируемые реализации переменной $J(t)$ обратились в ноль к моменту времени $t = 500$ суток), т.е. эпидемия завершается значительно раньше, чем в эксперименте 4, вариант 3. Кроме того, из рисунка 6 и таблицы 6 видно, что эпидемический процесс завершается за одну волну эпидемии. Следовательно, сдвиг распределения ω_R в сторону длительного периода поддержания иммунитета с близкой к единице вероятностью существенно влияет на продолжительность завершения эпидемического процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено детальное описание стохастической модели эпидемического процесса с немарковскими ограничениями для индивидуумов. Использование в модели достаточно произвольных распределений длительностей пребывания индивидуумов в латентной стадии заболевания и стадии поддержания иммунитета к инфекции приводит к необходимости детального описания динамики когорт индивидуумов,

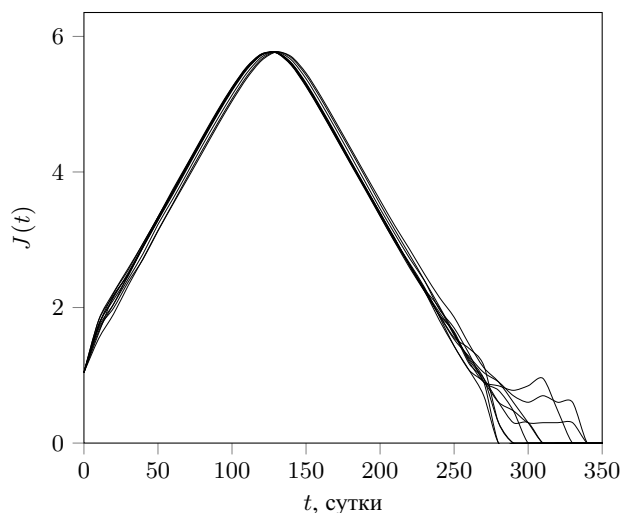


Рис. 6. Эксперимент 5: типичные реализации переменной $J(t)$.

включая популяционный и индивидуум-ориентированный подходы. Переменными модели являются не только целочисленные случайные величины, отражающие текущие численности когорт индивидуумов, но и семейства уникальных типов индивидуумов, учитывающие предысторию нахождения индивидуумов в различных стадиях развития инфекционного заболевания (см. раздел 1). Приведенные в разделе 2 формулы устанавливают рекуррентные соотношения, которые описывают связи между переменными модели с учетом их текущего и предшествующих состояний. Рекуррентные соотношения между переменными модели служат основой для разработки алгоритма численного моделирования эпидемического процесса с помощью метода Монте-Карло (см. раздел 3). Несмотря на сложность вероятностного описания, построенная модель допускает частичное аналитическое исследование, результаты которого приведены в разделе 4. Важным результатом аналитического исследования модели является вывод формулы (4.8) для показателя распространения инфекции $R_0^{(*)}$. Соотношения (4.9) использованы в разделе 5 для планирования вычислительных экспериментов с моделью.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что построенная модель воспроизводит типичные закономерности динамики эпидемического процесса в зависимости от значений $R_0^{(*)}$ (см. эксперименты 1–3 и эксперимент 4, варианты 1, 2). Вместе с тем, вычислительные эксперименты показывают, что в случае $R_0^{(*)} > 1$ возможно полное прекращение эпидемического процесса за конечный промежуток времени. В рамках варианта 3 эксперимента 4 модель допускает три волны эпидемического процесса с последующим завершением, в эксперименте 5 эпидемический процесс завершается после одной волны эпидемии ($R_0^{(*)} = 5.26$). Этот результат объясняется тем, что показатель распространения инфекции $R_0^{(*)}$ не содержит параметров, описывающих распределение случайной величины ω_R – длительность периода поддержания иммунитета. Результаты экспериментов 4, 5 имеют следующее объяснение. Если ω_R принимает достаточно большие значения с вероятностью, близкой к единице, то с течением времени численность когорты R становится относительно большой, а численность когорты S – относительно малой. Как следствие, индивидуумы когорты I «не успевают» заразить необходимого для развития эпидемии количества индивидуумов когорты S . Отметим, что достаточно большие значения ω_R могут быть обусловлены спецификой того или иного инфекционного заболевания или проведением масштабной вакцинации или ревакцинации населения региона.

Статья подготовлена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF–2022–0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cooke K., Van Den Driessche P. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays. *J. Math. Biol.* 1996. No. 35. P. 240–260. doi: [10.1007/s002850050051](https://doi.org/10.1007/s002850050051)
2. Beretta E., Hara T., Ma W., Takeuchi Y. Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay. *Nonlin. Anal.* 2001. V. 47. No. 6. P. 4107–4115. doi: [10.1016/S0362-546X\(01\)00528-4](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00528-4)
3. Taylor M.L., Carr T.W. An SIR epidemic model with partial temporary immunity modeled with delay. *J. Math. Biol.* 2009. No. 59. P. 841–880. doi: [10.1007/s00285-009-0256-9](https://doi.org/10.1007/s00285-009-0256-9)
4. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н. Исследование асимптотического поведения решений некоторых моделей эпидемических процессов. *Мат. биология и биоинформатика.* 2013. Т. 8. № 1. С. 21–48. doi: [10.17537/2013.8.21](https://doi.org/10.17537/2013.8.21)
5. Yuan Y., Belair J. Threshold dynamics in an SEIRS model with latency and temporary immunity. *J. Math. Biol.* 2014. No. 69. P. 875–904. doi: [10.1007/s00285-013-0720-4](https://doi.org/10.1007/s00285-013-0720-4)
6. Barbarossa M.V., Rost G. Immuno-epidemiology of a population structured by immune status: a mathematical study of waning immunity and immune system boosting. *J. Math. Biol.* 2015. No. 71. P. 1737–1770. doi: [10.1007/s00285-015-0880-5](https://doi.org/10.1007/s00285-015-0880-5)
7. Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А. Анализ математической модели эпидемии, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием. *Сиб. журн. инд. мат.* 2020. Т. 23. № 2. С. 119–132. (Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A. Analysis of an Epidemic Mathematical Model Based on Delay Differential Equations. *J. Appl. Ind. Math.* 2020. No. 14. P. 396–406. doi: [10.1134/S1990478920020167](https://doi.org/10.1134/S1990478920020167))
8. Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А. Анализ стадия-зависимой модели эпидемии, построенной на основе немарковского случайного процесса. *Сиб. журн. инд. мат.* 2020. Т. 23. № 3. С. 105–122. (Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A. Analysis of a Stage-Dependent Epidemic Model Based on a Non-Markov Random Process. *J. Appl. Ind. Math.* 2020. No. 14. P. 566–580. doi: [10.1134/S1990478920030151](https://doi.org/10.1134/S1990478920030151))
9. Перцев Н.В., Топчий В.А., Логинов К.К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций. *Сиб. журн. инд. мат.* 2022. Т. 25. № 3. С. 135–153. doi: [10.33048/SIBJIM.2021.25.312](https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.25.312)
10. Логинов К.К., Перцев Н.В. Прямое статистическое моделирование распространения эпидемии на основе стадия-зависимой стохастической модели. *Мат. биология и биоинформатика.* 2021. Т. 16. № 2. С. 169–200. doi: [10.17537/2021.16.169](https://doi.org/10.17537/2021.16.169)
11. Перцев Н.В., Логинов К.К., Лукашев А.Н., Вакуленко Ю.А. Стохастическое моделирование динамики распространения Ковид-19 с учетом неоднородности населения по иммунологическим, клиническим и эпидемиологическим критериям. *Мат. биология и биоинформатика.* 2022. Т. 17. № 1. С. 43–81. doi: [10.17537/2022.17.43](https://doi.org/10.17537/2022.17.43)
12. Marchenko M.A., Mikhailov G.A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2002. V. 17. P. 113–124. doi: [10.1515/rnam-2002-0107](https://doi.org/10.1515/rnam-2002-0107)
13. Marchenko M. PARMONC – a software library for massively parallel stochastic simulation. *Parallel Computing Technologies.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verl, 2011. P. 302–316. (Lecture Notes in Computer Science. V. 6873.). doi: [10.1007/978-3-642-23178-0_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23178-0_27)
14. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. *Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло.* М.: Академия, 2006.
15. Карлин С. *Основы теории случайных процессов.* М.: Мир, 1971.
16. Pertsev N.V., Topchii V.A., Loginov K.K. Numerical modelling of the transition

- of infected cells and virions between two lymph nodes in a stochastic model of HIV-1 infection. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2021. V. 36. No. 5. P. 293–302. doi: [10.1515/rnam-2021-0024](https://doi.org/10.1515/rnam-2021-0024)
17. Mirasol N.M. The Output of an $M/G/\infty$ Queuing System is Poisson. *Operations Research*. 1963. V. 11. No. 2. P. 282–284.
 18. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. М.: Наука, 1971.
 19. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир, 1975.

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2023.

Переработанный вариант поступил 31.05.2023.

Дата опубликования 15.06.2023.

Stochastic Modeling of the Epidemic Process Based On a Stage-Dependent Model with Non-Markov Constraints for Individuals

Pertsev N., Topchii V., Loginov K.

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. A continuous-discrete stochastic model of the epidemic process is presented. The model takes into account several stages of the development of an infectious disease, as well as the distributions of the durations of stay of individuals in these stages. The variables of the model are integer random variables that denote the quantity of individuals in cohorts, and sets of unique types of individuals that take into account the current state and history of stay of individuals in the stages of development of an infectious disease, distributions of durations of these stages are different from exponential or geometric. The results of an analytical and numerical research of the dynamics of the epidemic process are presented. The probabilities of infection eradication during a finite period of time are examined, depending on the numerical values of the infection spread coefficient and the distributions of the durations of the latent stage of the disease and the stage of preservation of immunity to infection.

Key words: *multidimensional random process, non-Markov components, branching process, Poisson distribution, Monte Carlo method, computational experiment, stage-dependent model, epidemiology.*