

УДК: 2013.12.27

Динамика ансамбля активных броуновских частиц, управляемых шумом.

©2015 Сергеев К.С.^{а1}, Вадивасова Т.Е.^{а2}, Четвериков А.П.^{а3}

^аНациональный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

Аннотация. Рассматривается динамика ансамбля из небольшого числа активных броуновских частиц, взаимодействующих посредством взаимного выравнивания скоростей. Частицы находятся под действием независимых источников шума: аддитивного (пассивного) шума и мультипликативного (активного). Предполагается, что мультипликативный шум влияет только на направления скоростей частиц. Поведение малого ансамбля сопоставляется с поведением бесконечно большого ансамбля, для которого существуют аналитические оценки для средней скорости частиц в ансамбле. В нашей работе показано, что для малого ансамбля также, как и для большого, с ростом интенсивности мультипликативного шума и в отсутствие аддитивного шума наблюдается переход от упорядоченного поведения к неупорядоченному, сопровождающийся явлением бистабильности. Граница значений коэффициента связи, при которых возможен эффект бистабильности сдвигается вверх с уменьшением числа частиц. Учет аддитивного шума приводит к трансформации области бистабильности к виду, который характеризуется двумя наивероятнейшими значениями скорости отдельной частицы (область бимодальности). Границы областей бистабильности и бимодальности соответствуют стохастическим бифуркациям в системе, имеющим различный характер.

Ключевые слова: активная броуновская частица, ансамбль частиц, индуцированный шумом переход, бистабильность, бимодальное распределение, стохастические бифуркации.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамики больших ансамблей идентичных биологических объектов (стай птиц и рыб, роев насекомых, сообществ микроорганизмов, в качестве примеров см., в частности, [1, 2, 6, 7, 8, 4, 3, 5, 9]) часто используется модель активных броуновских частиц (АБЧ). В ее рамках каждый элемент ансамбля представляется точечной частицей, обладающей источником энергии, описываемым нелинейным отрицательным трением. Частицы могут взаимодействовать между собой различным образом, например, подстраивать свою скорость под среднюю скорость ансамбля. Кроме того, они могут испытывать воздействие многих внешних некоррелированных факторов, что в простейшем приближении может представляться шумовой силой с

¹ksergeev@mail.ru

²vadivasovate@yandex.ru

³chetvap@rambler.ru

теми или иными статистическими свойствами, чаще всего соответствующими белому гауссовому шуму.

Математически модель АБЧ формулируется в виде системы уравнений Ланжевена, в которых традиционное диссипационное трение заменяется на нелинейное отрицательное трение. При малом уровне возмущений ансамбля оно описывает поступление в систему энергии, а при достижении высокого уровня энергии происходит нелинейное насыщение источника энергии. Исследование поведения ансамблей в рамках модели активных броуновских частиц является типичной проблемой статистического описания многомерных неравновесных нелинейных систем. В исключительных случаях удается провести аналитический анализ динамики системы; например, для ансамблей с очень большим числом элементов возможно гидродинамическое описание поведения системы. Однако типичным исследовательским инструментом при применении модели АБЧ является численное моделирование поведения ансамбля.

В настоящей работе излагаются результаты исследования динамики относительно малого ансамбля АБЧ, для которого заключения аналитического анализа, полученные в рамках гидродинамического описания, не обязаны строго выполняться. В то же время использование модели небольшого ансамбля дает больше возможностей для проведения численных экспериментов и позволяет выявить тенденции эволюции динамики при возрастании числа элементов.

2 МОДЕЛЬ АНСАМБЛЯ АКТИВНЫХ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ВНЕШНЕЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

1. Описание модели

Будем изучать поведение ансамбля идентичных двумерных активных броуновских частиц, взаимодействие которых происходит таким образом, что частицы ансамбля стремятся выровнять свои скорости [2]. Говоря другими словами, чем сильнее скорость частицы отличается от средней скорости ансамбля, тем большее воздействие со стороны ансамбля она испытывает. Кроме того, на частицу влияет множество некоррелированных внешних факторов, что позволяет представить это воздействие в виде стохастической силы со статистическими свойствами белого шума. Тогда динамика i -той частицы ($i = 1, \dots, N$) с массой $m_i = m$ определяется уравнениями Ланжевена в смысле Стратоновича:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i; \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\gamma(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i + \tilde{\mu}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) + \boldsymbol{\eta}_i(t). \quad (1)$$

Здесь r_i и v_i — координата и скорость i -той частицы, γ — зависящий от величины скорости коэффициент трения, $\tilde{\mu}$ — коэффициент взаимодействия, функция $\boldsymbol{\eta}$ описывает стохастическое воздействие, \mathbf{u} — средняя по ансамблю скорость частиц. Активное поведение частиц определяется коэффициентом трения $\gamma(\mathbf{v}_i)$. Предполагается, что он описывается законом Шинбайна-Грулера [2, 10], т.е. принимает положительные либо отрицательные значения в зависимости от скорости частицы

$$-\gamma(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i = -\alpha \left(1 - \frac{v_0}{|\mathbf{v}_i|}\right) \mathbf{v}_i = \alpha(v_0 - |\mathbf{v}_i|) \mathbf{e}_{i,v}, \quad (2)$$

где v_0 — величина, к которой линейно релаксирует скорость каждой частицы, параметр α характеризует величину трения (скорость релаксации). Единичный вектор $\mathbf{e}_{i,v}$ указывает направление скорости частицы. Как следует из уравнения (2), частицы с малыми скоростями $|\mathbf{v}_i| < v_0$ ускоряются в направлении движения, а с большими скоростями

$|\mathbf{v}_i| > v_0$ – тормозятся. В детерминированном случае время релаксации скорости $\tau_\alpha = m/\alpha$. Есть некоторая величина скорости v_0 , для которой сила трения равна нулю: $\gamma(v_0) = 0$. Следует отметить, что это трение неполярно – нет разницы, движется частица «вперед» или «назад».

Взаимодействие частиц осуществляется в соответствии с линейным механизмом выравнивания скоростей. Это означает, что частица с номером i старается выровнять свою скорость в соответствии со средней скоростью частиц ансамбля. Если средняя скорость $\mathbf{u} = 0$, взаимодействие между частицами сводится к трению Стокса и замедляет частицы.

Слагаемое $\eta_i(t)$ в уравнении (1) задает суперпозицию случайных сил, действующих на i -тую частицу. Единичный вектор $\mathbf{e}_{i,v}$ указывает направление скорости, $\mathbf{e}_{i,\varphi}$ – перпендикулярен к скорости:

$$\eta_i(t) = \sqrt{2d_E} \begin{pmatrix} \xi_{i,x}(t) \\ \xi_{i,y}(t) \end{pmatrix} + \sqrt{2d_v} \xi_{i,v}(t) \mathbf{e}_{i,v}(t) + \sqrt{2d_\varphi} \xi_{i,\varphi}(t) \mathbf{e}_{i,\varphi}(t). \quad (3)$$

Первое слагаемое представляет пассивный внешний шум, действующий на обе компоненты вектора скорости \mathbf{v}_i с интенсивностью d_E . Он аналогичен обычным броуновским флуктуациям, или тепловому шуму, и называется пассивным, так как не определяется никаким образом движением частиц. Оставшиеся два слагаемых представляют активный внутренний шум. Он состоит из 2 частей. Одна компонента, с интенсивностью d_v , влияет на величину скорости. Другая, с интенсивностью d_φ , изменяет только направление движения. Случайный процесс $\xi_{i,\alpha}(t)$ – это некоррелированный белый Гауссов шум с нулевым средним:

$$\langle \xi_{i,\alpha}(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi_{i,\alpha}(t) \xi_{j,\beta}(t') \rangle = \delta_{i,j} \delta_{\alpha,\beta} \delta(t - t'), \quad (4)$$

$$i, j \in \{1, \dots, N\}; \quad \alpha, \beta \in \{x, y, v, \varphi\}.$$

Переходя к безразмерным переменным \mathbf{r} , t и \mathbf{v} ,

$$\frac{\alpha}{mv_0} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \frac{\alpha}{m} t \rightarrow t, \quad \frac{\mathbf{v}}{v_0} \rightarrow \mathbf{v}, \quad (5)$$

получаем уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i,$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{e}_{i,v} - \mathbf{v}_i + \mu(\mathbf{u}_{A_i} - \mathbf{v}_i) + \sqrt{2D_E} \begin{pmatrix} \xi_{i,x} \\ \xi_{i,y} \end{pmatrix} + \sqrt{2D_v} \xi_{i,v} \mathbf{e}_{i,v} + \sqrt{2D_\varphi} \xi_{i,\varphi} \mathbf{e}_{i,\varphi}, \quad (6)$$

где $\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\alpha}$, $D_\beta = \frac{d_\beta}{m\alpha v_0^2}$ – безразмерные параметры. В уравнения входят преобразованные источники шума $\xi(t') = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \xi(t)$. Поведение отнормированной системы (6) определяется четырьмя безразмерными параметрами: коэффициентом взаимодействия μ и тремя величинами интенсивности шума D_E, D_v, D_φ .

Для макроскопического поведения очень большого ансамбля активных броуновских частиц можно применить гидродинамическое описание, в рамках которого ансамбль движущихся частиц представляется в виде непрерывного гидродинамического потока. Уравнение для совместной плотности вероятности координат и компонент скорости выводится непосредственно из уравнений Ланжевена. Такой подход применялся для анализа модели (6) динамики АБЧ с выравниванием скорости в одномерном [11] и двумерном [12] ансамблях.

Пусть $p(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j, t)d^2\mathbf{r}_j d^2\mathbf{v}_j$ – вероятность обнаружить j -ю частицу в момент времени t со скоростью в интервале $[\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j + d\mathbf{v}_j]$ и в области пространства $[\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j + d\mathbf{r}_j]$. Плотность вероятности для одной частицы $p(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j, t)$ может быть получена из совместной плотности вероятности $p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t)$ в результате интегрирования по координатам и скоростям всех частиц, кроме j -той. Так как все частицы находятся в одинаковых условиях, при решении индекс не используется. Более подробно методика решения изложена в [2]. Для пространственно однородного стационарного ансамбля в [2] получена система однородных уравнений для средней скорости \mathbf{u} и компонент тензора температуры $T_{\parallel, \perp}$, который характеризует интенсивность флуктуаций динамических переменных. Показано, что эти уравнения могут иметь два устойчивых решения. Одно из них соответствует неупорядоченному поведению ансамбля с нулевой средней скоростью и конечными флуктуациями:

$$|\mathbf{u}_1| = 0; \quad T_1 = \frac{2D_E + D_v}{1 + \mu} + 0.5(1 + \mu)^{-2}(1 \pm \sqrt{1 + 4(2D_E + D_v)(1 + \mu)}). \quad (7)$$

Оно устойчиво выше некоторого критического уровня шума и ниже критической силы связи (взаимодействия частиц). Другое решение соответствует упорядоченному состоянию ансамбля:

$$|\mathbf{u}_2| = \sqrt{0.5(1 + \sqrt{1 - 4D_\phi}) - D_\phi - \frac{D_\phi + D_v + 2D_E}{\mu}}; \quad (8)$$

$$T_2 = \frac{D_\phi + D_v + 2D_E}{\mu}.$$

В этом случае при нулевой интенсивности всех источников шума получаем значения $|\mathbf{u}_2| = 1; T_2 = 0$. Такое решение означает, что все частицы движутся со стационарной скоростью $|\mathbf{v}_i| = 1$. Оно устойчиво при малом шуме и сильном взаимодействии. При слабом взаимодействии $\mu < 1$ теория предсказывает непрерывный переход средней скорости $|\mathbf{u}|$ от значения, соответствующего упорядоченному состоянию, к значению, соответствующему неупорядоченному (рис. 1,а). В случае сильного взаимодействия $\mu > 1$ и небольшого уровня пассивного (аддитивного) шума возникает новый режим (рис. 1,б). Для этого режима характерен скачкообразный переход «порядок–беспорядок» при изменении уровня углового шума. Более того, в области перехода система релаксирует в одно из стабильных состояний в зависимости от начальных условий, то есть появляется бистабильность.

Приведенные выше результаты теории и численного моделирования, полученные в [2] для большого ансамбля частиц, находятся в хорошем количественном соответствии и свидетельствуют о наличии в ансамбле частиц индуцированного шумом перехода: при увеличении интенсивности углового шума D_ϕ наблюдается переход от упорядоченного состояния к неупорядоченному, который может сопровождаться явлением бистабильности в некоторой области значений D_ϕ .

3 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АНСАМБЛЯ АКТИВНЫХ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ

1. Постановка задачи

В работе [2] проведено численное моделирование динамики большого (порядка 10000 элементов) ансамбля активных броуновских частиц. Также в приближении бесконечно большого числа частиц получены аналитические результаты, хорошо

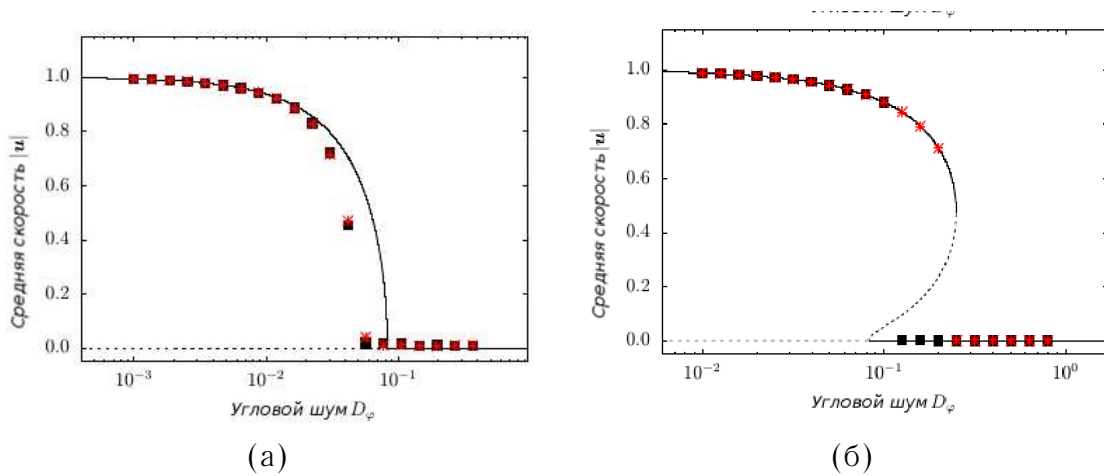


Рис. 1. Зависимость модуля средней скорости от интенсивности углового шума, полученная аналитически в рамках гидродинамического подхода при сильном взаимодействии и слабом аддитивном шуме (а) и при сильном аддитивном шуме и слабом взаимодействии (б). Сплошная кривая соответствует теоретическому расчету в рамках гидродинамического подхода, значками обозначены результаты численного моделирования динамики ансамбля из 10000 частиц: крестики соответствуют упорядоченному начальному состоянию; квадратики — неупорядоченному. Результаты взяты из [2].)

согласующиеся с данными численного эксперимента для большого ансамбля. Однако полученные теоретические результаты могут неадекватно отражать поведение ансамбля, если число его элементов недостаточно велико. В связи с этим, возникает вопрос: как ведет себя малый ансамбль, из 10^d частиц и менее, где d — размерность пространства? Цель настоящей работы — ответить на этот вопрос, а конкретнее, определить, при каком размере ансамбля появляются расхождения с результатами гидродинамического описания, как влияет количество частиц на наличие бистабильности и на индуцированный шумом переход «порядок—беспорядок», а также установить связь между динамикой ансамбля и статистическими характеристиками одной произвольно выбранной частицы. Для этого численно моделировался ансамбль (6) из 10–300 частиц. Взаимодействие между частицами полагалось «глобальным», то есть суммирование происходит по всему ансамблю. При таком подходе граничные условия не важны, поскольку взаимодействие осуществляется через общее поле скоростей частиц и никак не связано с их координатами. Некоторые особенности динамики малого ансамбля рассмотрены в [13].

В настоящей работе поведение аналогичного малого ансамбля исследуется с учетом влияния, оказываемого аддитивным шумом различной интенсивности. При этом шум, воздействующий на модуль скорости частицы, не учитывается ($D_v = 0$). Напомним, стохастические дифференциальные уравнения (6) рассматриваются в смысле Стратоновича. Численное интегрирование осуществляется модифицированным методом Эйлера — Коши [15] с шагом $\delta t = 0.005$, с учетом источников шума.

2. Индуцированный шумом переход

Рассмотрим, возможен ли индуцированный шумом переход от упорядоченного состояния к неупорядоченному в ансамбле из небольшого числа частиц. В качестве характеристики упорядоченности можно использовать модуль средней по ансамблю скорости, как в работе [2]. Однако, в силу небольшого количества частиц, зависимость

$|\mathbf{u}|$ от D_ϕ является сильно осциллирующей функцией: в установившемся режиме средняя скорость флуктуирует относительно некоторого среднего значения. Чтобы избавиться от этих флуктуаций, следует сгладить функцию, то есть усреднить по времени на m шагах интегрирования. Обозначим сглаженную характеристику U , и вычислять ее будем по формуле

$$U = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |\mathbf{u}(t)|. \quad (9)$$

Зависимости $U(D_\phi)$ получаются гладкими, и ими удобно пользоваться для диагностики переходов между упорядоченным и неупорядоченным состояниями. За упорядоченное состояние принимается режим, в котором значение U близко к единице. В упорядоченном состоянии скорости всех частиц приблизительно одинаковы по величине и, главное, по направлению, как это видно на рис. 2,а. Такое состояние называется режимом трансляции.

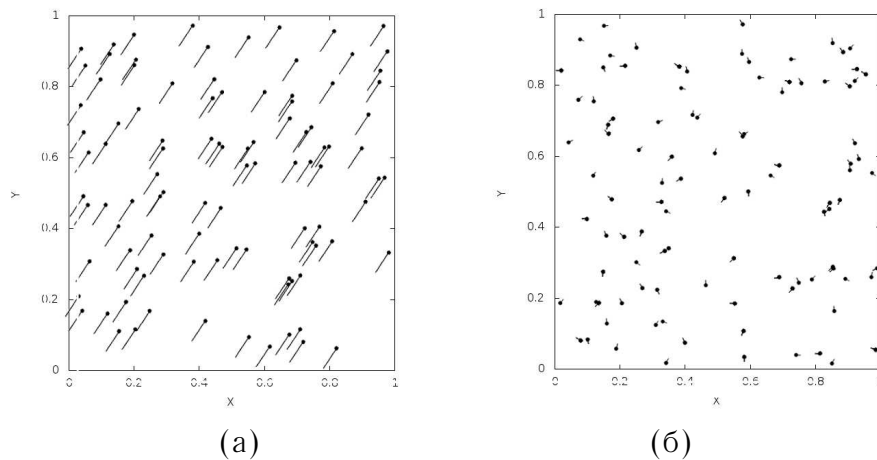


Рис. 2. Типичные состояния ансамбля при двух разных значениях интенсивности углового шума: а – упорядоченный режим при $D_\phi = 0.2$; б – неупорядоченный режим при $D_\phi = 0.3$. $D_E = 0.01$, $\mu = 5$. Точками показаны координаты частиц, отрезки линий указывают направления скорости. Длина отрезков пропорциональна модулю скорости.

В неупорядоченном состоянии U близка к нулю. При этом скорости частиц разнонаправлены, сами частицы колеблются около неподвижных точек, но не смещаются. Центр масс системы при этом тоже остается на месте. Состояние системы показано на рис. 2,б. Поведение ансамбля частиц во времени в двух описанных состояниях проиллюстрировано анимацией ($D_{ph}=0.25.gif$ и $D_{ph}=0.gif$ в доп. материалах к статье).

Определив понятия порядка и беспорядка, рассмотрим, как происходят переходы между этими состояниями и как на эти переходы влияет количество частиц в ансамбле. Интенсивность аддитивного шума в проведенных расчетах выбиралась малой, $D_E = 0.01$, так что аддитивный шум в течение времени наблюдения (порядка $10^6 - 10^7$ безразмерных единиц, при шаге интегрирования 0.005) практически не влиял на распределение скоростей и величину U , и результаты практически соответствовали случаю отсутствия аддитивного шума. На рис. 3 приведено семейство зависимостей величины U от интенсивности углового шума D_ϕ при $\mu = 3$. Эти 4 зависимости построены для ансамблей с различным количеством частиц. Начальные условия во всех случаях одинаковы: координаты частиц распределены случайным образом, а скорости – упорядоченно: в одном направлении и равными 1 по модулю. Видно, что ансамбли

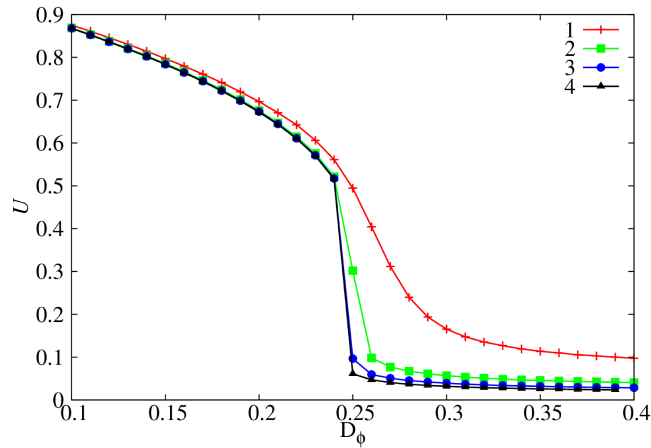


Рис. 3. Зависимости средней скорости U от интенсивности углового шума для различного числа частиц N в ансамбле: кривая 1 — $N = 20$; кривая 2 — $N = 100$; кривая 3 — $N = 200$; кривая 4 — $N = 300$. $D_E = 0.01$, $\mu = 3$.

из 300, 200 и даже 100 частиц ведут себя качественно так же, как и предсказывает теория (см. рис. 1). С ростом шума, при значении $D_\phi \approx 0.25$, происходит скачок величины U , который можно рассматривать как переход от упорядоченного состояния к беспорядку. Однако, если число частиц в ансамбле будет менее 100, появляется серьезное отличие. Вместо резкого скачка наблюдается плавное изменение U . Причина этого состоит в исчезновении области бистабильности в ансамбле из малого числа частиц при заданном значении μ . Как показывают результаты моделирования, при $\mu = 3$ явление бистабильности наблюдается для ансамбля из 100 частиц, но не наблюдается в ансамбле из 20.

Таким образом, если аддитивный шум отсутствует (или его воздействие пренебрежимо мало), то явление бистабильности при переходе «порядок—беспорядок», обнаруженное при гидродинамическом описании [2], существует в малых ансамблях, для которых гидродинамическое описание не применимо. Бистабильность при этом понимается как возможность реализации при одной интенсивности углового шума двух стационарных распределений скорости. Выход системы на то или другое распределение определяется начальными условиями. На графике зависимости $U(D_\phi)$ наличие бистабильности соответствует петля гистерезиса, изображенная на рис. 4.

Представленная на рис. 4 кривая получена следующим образом. Первоначально задается низкая интенсивность шума, и система находится в упорядоченном состоянии. При увеличении интенсивности углового шума (смещение по графику слева направо) в области бистабильности $D_\phi \approx 0.23$ система остается в упорядоченном состоянии (верхняя ветвь красной кривой). При критическом значении $D_\phi = 0.235$ происходит резкий переход в неупорядоченное состояние (нижняя ветвь красной кривой). Пусть теперь система находится в неупорядоченном состоянии при большом угловом шуме. При уменьшении интенсивности шума это состояние сохраняется (нижняя ветвь зеленой кривой) вплоть до левой границы области бистабильности, после чего наблюдается резкий переход на верхнюю ветвь графика. Если область бистабильности отсутствует, то зависимость $U(D_\phi)$ должна демонстрировать плавный переход в неупорядоченное состояние, что и наблюдается для 20 частиц (см. рис. 3).

Причины исчезновения бистабильности в малых ансамблях, по-видимому, скрыты в механизме взаимодействия частиц. Каждая частица находится под действием шума и через механизм выравнивания скоростей связана с остальными

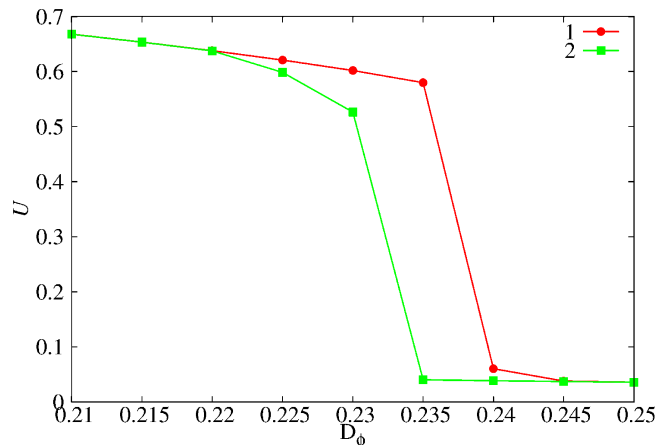


Рис. 4. Петля гистерезиса на зависимости средней скорости U от шума для ансамбля из 100 частиц при $\mu = 5$. Результаты получены для времени наблюдения 10^6 после периода установления длительностью 10^3 .

частицами. Если ансамбль велик, то совокупное влияние других частиц более сильное. Чтобы разупорядочить ансамбль, в этом случае нужно рассогласовать направления скорости одновременно у множества частиц, для чего требуется большая интенсивность шума. Поэтому большой ансамбль дольше сохраняет информацию о начальном упорядоченном распределении скоростей, а в малом ансамбле каждая разупорядоченная частица значительно уменьшает выравнивающее взаимодействие. В результате начальное состояние быстро «забывается». При этом область бистабильности отсутствует.

Взаимодействие между частицами можно усилить, увеличив параметр μ . В связи с этим возникает вопрос: могут ли малые ($N < 100$) ансамбли демонстрировать бистабильность при сильном взаимодействии между частицами? Результаты исследований показали, что взаимосвязь между наличием бистабильности и интенсивностью взаимодействия μ действительно существует. Для ансамблей из менее чем 100 частиц также были получены зависимости $U(D_\phi)$, демонстрирующие бистабильность, но уже при $\mu > 3$. На рис. 5 показана граница значений параметра μ , для которых переход к неупорядоченному состоянию сопровождается бистабильностью, при изменении величины ансамбля N . Ниже представленной линии бистабильности не наблюдается.

Видно, что чем меньше частиц, тем более сильное взаимодействие нужно для бистабильности. Так, даже ансамбль из 10 частиц может быть бистабильным, но только при $\mu > 18$ (то есть при силе взаимодействия в 6 раз больше, чем в случае ансамбля из 100 частиц!). При моделировании ансамблей с менее чем 10 частицами численный эксперимент не позволяет однозначно определить наличие или отсутствие бистабильности, поскольку для таких маленьких ансамблей статистические характеристики становятся неточными.

3. Эволюция распределения скорости

Выясним, как индуцированный шумом переход «порядок–беспорядок» отражается на поведении отдельных частиц. Для этого построим вероятностное распределение компонент вектора скорости произвольно выбранной частицы. Поскольку все частицы находятся в одинаковых условиях, номер выбранной для анализа частицы не имеет значения, и соответствующий индекс можно опустить.

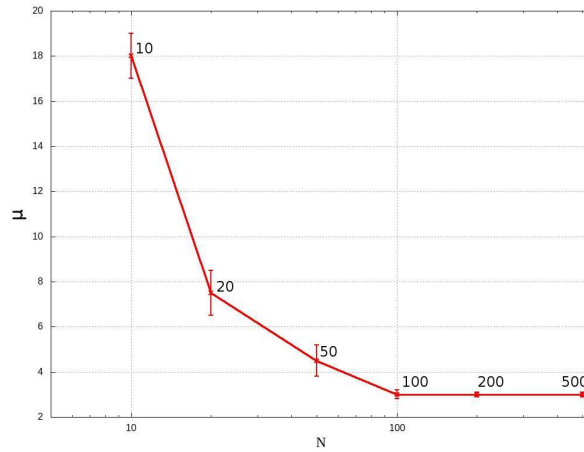


Рис. 5. Граница существования области бистабильности на параметрической плоскости N, μ .

Плотность вероятности $p(v_x, v_y)$ легко получить, обработав результаты численного интегрирования системы (6). Известно, что поверхность $p(v_x, v_y)$ для активных броуновских частиц имеет форму аксиально-симметричного кратера [1]. На рис. 6 изображены распределения для низкой и высокой интенсивности углового шума.

Симметрия распределения объясняется изотропностью системы: в течение достаточно долгого времени наблюдения могут реализовываться любые направления движения частиц. Максимум поперечного сечения кратера расположен на некоторой окружности, и радиус этой окружности v_m есть наимвероятнейшая скорость частицы. Для анализа формы распределения более удобным является сечение кратера плоскостью $v_y = 0$, поэтому далее под вероятностным распределением подразумевается кривая $p(v_x, v_y = 0)$, ее максимумы находятся в точках $\pm v_m$. Принципиален вопрос, как меняется распределение скорости при переходе «порядок–беспорядок».

Начнем исследование с наиболее простого случая, когда бистабильность отсутствует. Для этого рассмотрим ансамбль из 100 частиц при $\mu = 2$. Как было сказано выше, в отсутствие области бистабильности переход происходит плавно и на зависимости $U(D_\phi)$ нет резких скачков. Распределение скорости при этом тоже плавно эволюционирует, как показано на рис. 7.

При малом шуме (кривая 1) система находится в упорядоченном состоянии и $v_m \approx 0.7$. С ростом интенсивности шума наимвероятнейшая скорость уменьшается. Так, при $D_\phi = 0.259375$ имеем $v_m \approx 0.45$ (кривая 2), а при $D_\phi = 0.275 - v_m \approx 0.35$ (кривая 3). Кризисов (разрушений распределения скорости) не наблюдается.

Принципиально другой сценарий система демонстрирует при бистабильности. Исследуем ансамбль из 100 частиц при $\mu = 5$ и различных значениях интенсивности шума (рис. 8). При $D_\phi = 0.225$ наимвероятнейшая скорость $v_m \approx 0.7$, то есть система находится в упорядоченном состоянии (кривая 1). Но при незначительном увеличении интенсивности шума (до 0.226) происходит жесткая стохастическая бифуркация: разрушается стационарное распределение с $v_m \approx 0.7$ и возникает другое, с $v_m \approx 0.2$. На кривой 2 (рис. 8) заметны еще два максимума на $|v_x| \approx \pm 0.2$. Установившемуся распределению предшествует длительный переходный процесс, который при построении распределения не должен учитываться. Однако длительность этого процесса заранее неизвестна, она зависит от конкретной реализации шума и его интенсивности. При построении рис. 8 из-за проблем численного счета не удалось полностью отбросить стадию установления, с чем связано появление двух

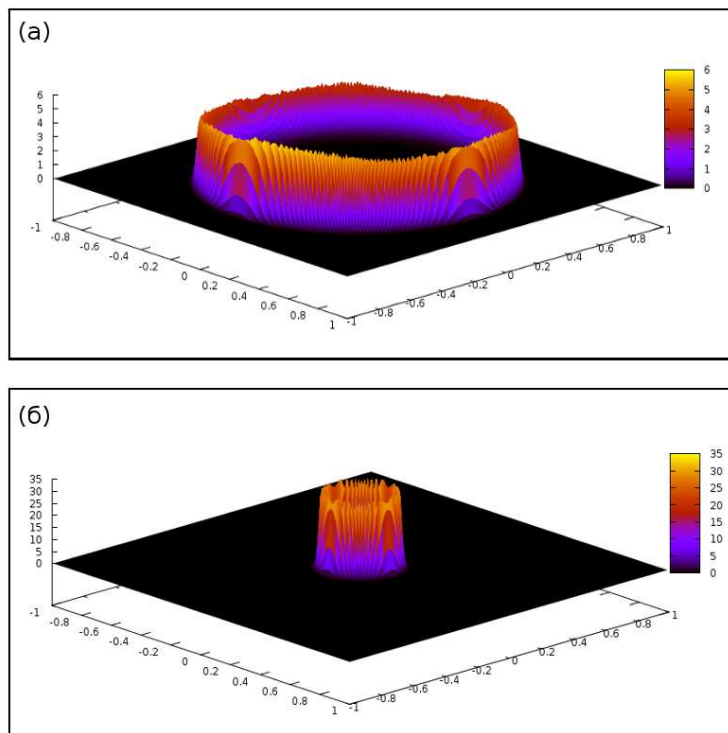


Рис. 6. Стационарные распределения компонент скорости частицы в ансамбле $N = 100$ при $\mu = 5$, $D_E = 0$ и двух значениях параметра D_ϕ : а – в упорядоченном режиме, $D_\phi = 0.2$; б – в неупорядоченном режиме, $D_\phi = 0.3$. Расчеты выполнялись для интервалов времени 10^6 после периода установления 10^3 .

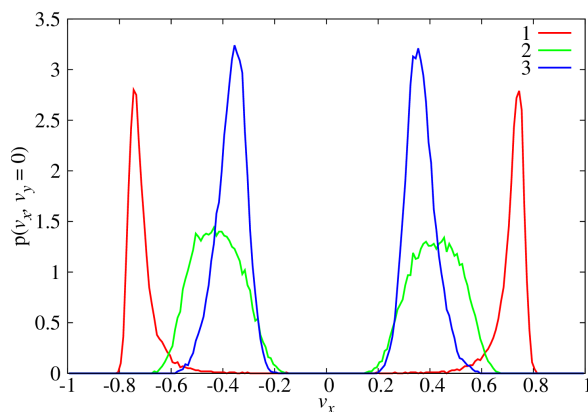


Рис. 7. Стационарные вероятностные распределения $p(v_x, v_y = 0)$ в отсутствие бистабильности ($\mu = 2$, $D_E = 0$) при $D_\phi = 0.2$ (кривая 1), $D_\phi = 0.259375$ (кривая 2), $D_\phi = 0.275$ (кривая 3).

дополнительных максимумов. Их не следует принимать во внимание при анализе поведения системы.

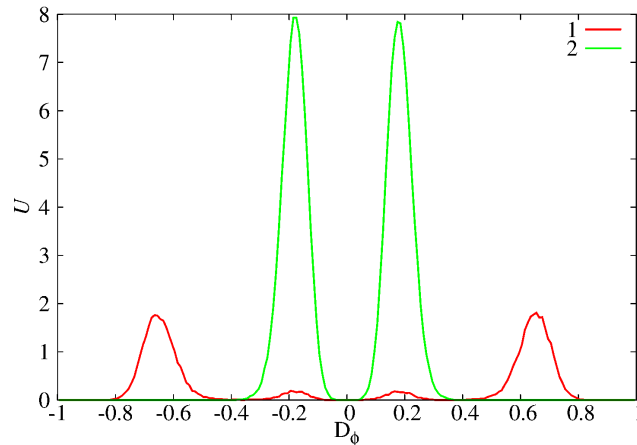


Рис. 8. Стационарные вероятностные распределения $p(v_x, v_y = 0)$ в случае, когда переход “порядок–беспорядок” сопровождается бистабильностью ($\mu = 5$, $D_E = 0$), полученные при $D_\phi = 0.225$ (кривая 1) и $D_\phi = 0.228$ (кривая 2).

Выше было сказано, что в области бистабильности информация о начальном состоянии системы сохраняется. Этот эффект очень наглядно демонстрирует анализ распределений скорости. На рис. 9 изображены распределения, полученные при $\mu = 5$ и одинаковой интенсивности шума $D_\phi = 0.235$, но при различных начальных условиях. Кривая 1 соответствует упорядоченному начальному состоянию: скорости частиц сонаправлены и равны 1 по абсолютной величине. Для кривой 2 заданы случайные начальные условия: направления и величины скоростей равномерно распределены в интервалах $[0; 2\pi]$ и $[0; 1]$ соответственно. Как видно из результатов численного моделирования, по крайней мере в течение времени наблюдения до 10^6 безразмерных единиц начальное состояние системы сохраняется. Эволюция плотности вероятности $p(v_x, v_y = 0)$ с ростом интенсивности углового шума, сопровождающаяся наличием области бистабильности, проиллюстрирована в доп. материалах (см. анимацию $De=0.gif$; красная ветвь соответствует упорядоченным начальным условиям, зеленая – случайным).

Связь бифуркационного значения v_m с интенсивностью шума, при которой происходит скачок величины U , проиллюстрирована на рис. 10 ($N = 100$ частиц, $\mu = 3$).

В неупорядоченном режиме наиболее вероятная скорость больше, чем средняя по ансамблю. Так происходит, потому что под действием шума направления движений отдельных частиц не согласованы, но скорость частиц при этом может быть ненулевой. Центр масс ансамбля все равно будет покоиться, так как все элементы движутся в различных направлениях. В качестве иллюстрации этого эффекта были построены распределения вероятностей средней (по ансамблю) скорости. На рис. 11,а приведены распределения скорости одной частицы и средней скорости ансамбля в упорядоченном состоянии. Видно, что наиболее вероятные значения скоростей очень близкие. Это означает, что центр масс системы движется так же, как отдельные частицы.

В неупорядоченном состоянии (рис. 11,б) картина принципиально другая. Наиболее вероятное значение средней скорости равно нулю. Каждая частица движется с наиболее вероятной скоростью $v_m \approx 0.2$, это легко определить по кривой 1. Под действием шума направление скорости постоянно меняется. Кроме того, все частицы движутся в случайных направлениях. Поскольку средняя скорость есть векторная сумма скоростей

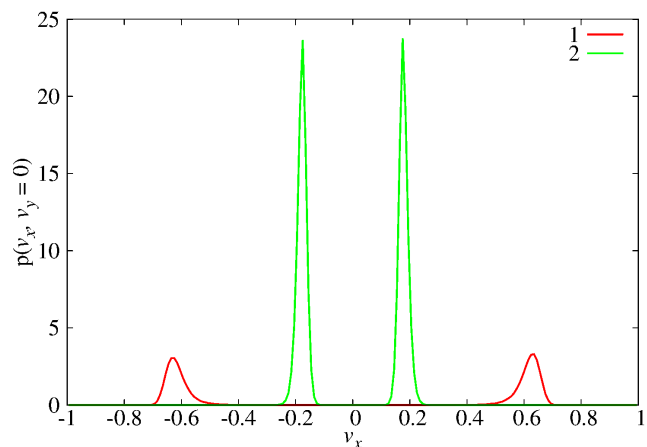


Рис. 9. Стационарные распределения скорости в области бистабильности для упорядоченных (кривая 1) и случайных (кривая 2) начальных условий. Значения параметров: $\mu = 5$, $D_E = 0$, $D_\phi = 0.235$. Расчеты выполнялись для интервалов времени 10^6 после периода установления 10^3 .

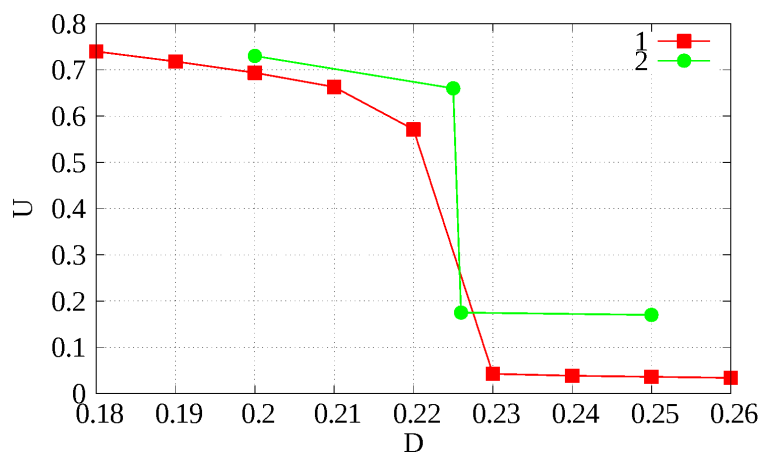


Рис. 10. Зависимость значения U (кривая 1) и наивероятнейшей скорости v_m (кривая 2) с интенсивностью углового шума D_ϕ при $N = 100$, $\mu = 5$, $D_E = 0$.

всех элементов ансамбля, ее наивероятнейшее значение равно нулю (кривая 2).

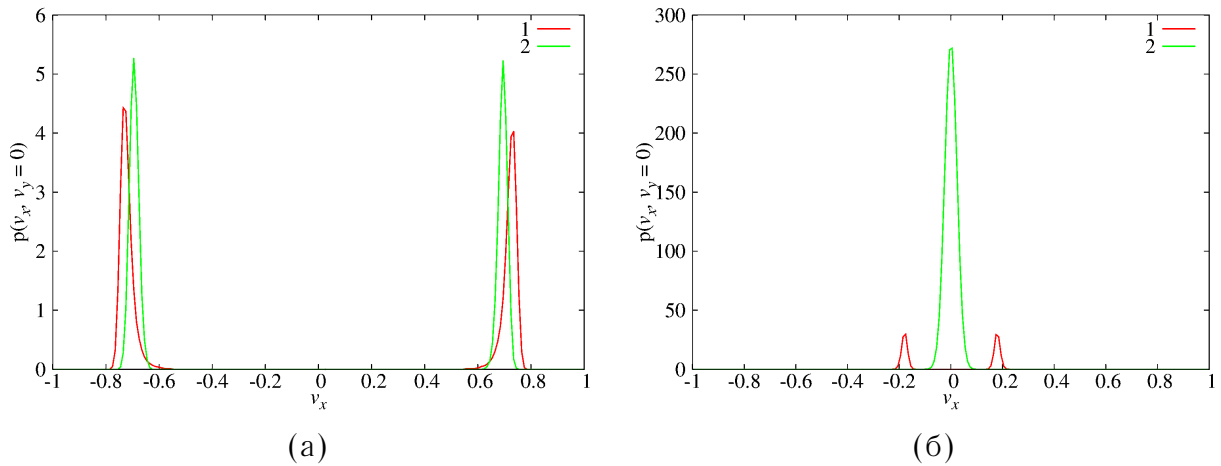


Рис. 11. Распределения скорости одной частицы (кривая 1) и средней скорости ансамбля из 100 частиц (кривая 2) при $\mu = 5$, $D_E = 0$ и различном угловом шуме: а – в упорядоченном состоянии при $D_\phi = 0.2$; б – в неупорядоченном состоянии при $D_\phi = 0.3$.

Распределения средней скорости в режиме бистабильности изображены на рис. 12. Если стартовать с упорядоченного состояния, то наивероятнейшая средняя скорость $U_m \approx 0.6$. Если же начать интегрирование со случайно выбранных значений скоростей, то ансамбль остается разупорядоченным. Наивероятнейшее значение средней скорости при этом равно нулю.

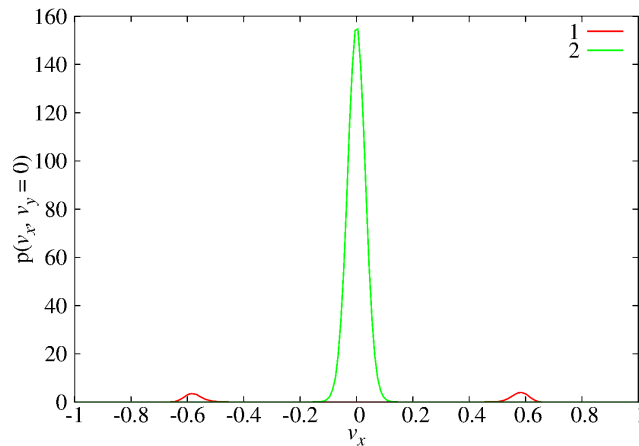


Рис. 12. Распределение средней скорости ансамбля с $N = 100$ в режиме бистабильности при $D_\phi = 0.235$ и $\mu = 5$. Кривая 1 соответствует упорядоченным начальным условиям, кривая 2 – неупорядоченным.

4. Влияние аддитивного шума

Выше рассматривался переход к неупорядоченному состоянию под действием активного шума, влияющего на направление скорости частиц. Интенсивность D_E пассивного шума была либо равна нулю, либо мала настолько, что не оказывала заметного влияния на поведение ансамбля в течение интервалов наблюдения. Однако остался открытым вопрос о возможности бистабильности при ненулевом аддитивном (пассивном) шуме в пределе $t \rightarrow \infty$.

Бистабильность в рассматриваемой системе понимается как возможность реализации в системе различных стационарных состояний при одном и том же уровне шума. Выход системы на то или другое стационарное состояние определяется начальными условиями. В отсутствие аддитивного шума ансамбль может бесконечно долго находиться в одном из стационарных состояний. Предположим, что при введении аддитивного шума переходы из одного состояния в другое становятся возможными. Строго говоря, существование двух стационарных состояний распределения скорости частицы в этом случае становится невозможным. Однако при слабом аддитивном шуме переключения между состояниями происходят крайне редко и в течение длительных интервалов времени наблюдения не фиксируются. В этом случае можно говорить о существовании двух стадий процесса, соответствующих двум максимумам стационарного распределения скорости. С ростом интенсивности аддитивного шума переходы между стадиями происходят чаще, и о бистабильности уже нельзя говорить даже на конечных интервалах времени. Таким образом, при аддитивном шуме будет существовать только одно стационарное распределение, но если интенсивность D_E будет всё же не слишком велика, то в некоторой области значений интенсивности углового шума D_ϕ распределение скорости будет бимодальным — в сечении поверхности $p(v_x, v_y)$ будет не два, а четыре максимума, что означает существование двух наиболее вероятных значений для абсолютной величины скорости. Распределение скорости частицы для этого случая показано на рис. 13. При переходе «порядок—беспорядок» с ростом интенсивности углового шума в этом случае наблюдаются стохастические бифуркации Р-типа [14], состоящие в появлении и исчезновении двух пар максимумов в сечении распределения $p(v_x, v_y)$. Эти бифуркации ограничивают область бимодальности справа и слева. Эволюция распределения скорости в этом случае проиллюстрирована анимацией $De=0.1.gif$ в доп. материалах к статье.

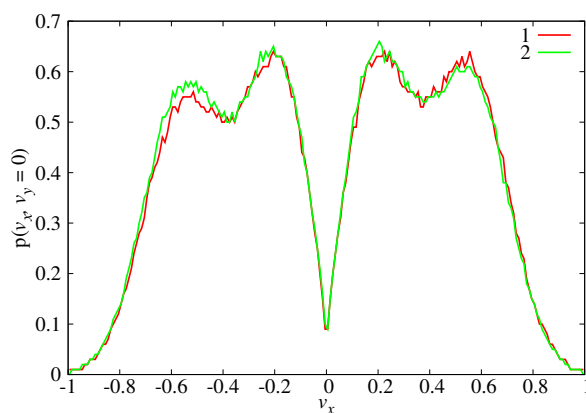


Рис. 13. Стационарное распределение скорости частицы, полученное при упорядоченных (кривая 1) и случайных (кривая 2) начальных условиях в области бимодальности при $D_E = 0.1$, $D_\phi = 0.226$, $\mu = 5$, $N = 100$.

С ростом амплитуды аддитивного шума область бимодальности исчезает. В этом случае стохастические бифуркации перестают наблюдаться, и эволюция распределения скорости сводится к трансформации формы распределения без его каких-либо качественных изменений (см. анимацию $De=0.25.gif$ в доп. материалах к статье).

При введении аддитивного шума меняется не только механизм перехода «порядок—беспорядок», но также и пороговое значение интенсивности мультипликативного шума, при котором этот переход происходит, что соответствует аналитическому результату, полученному при гидродинамическом описании [2]. На

рис. 14 приведена двухпараметрическая диаграмма на плоскости параметров (D_ϕ , D_E). Цветом показана величина наивероятнейшей скорости v_m . Если считать величину v_m критерием оценки упорядоченности, то перепад ее значений можно трактовать как переход между упорядоченным и неупорядоченным состояниями. Из диаграммы видно, что при нулевой интенсивности D_E переход происходит в диапазоне $D_\phi \in (0.2; 0.225)$. При $D_E = 0.45$ переход наблюдается в интервале $D_\phi \in (0.15; 0.175)$. Таким образом, чем интенсивнее аддитивный шум, тем меньшая пороговая интенсивность мультипликативного шума нужна для разупорядочивания системы.

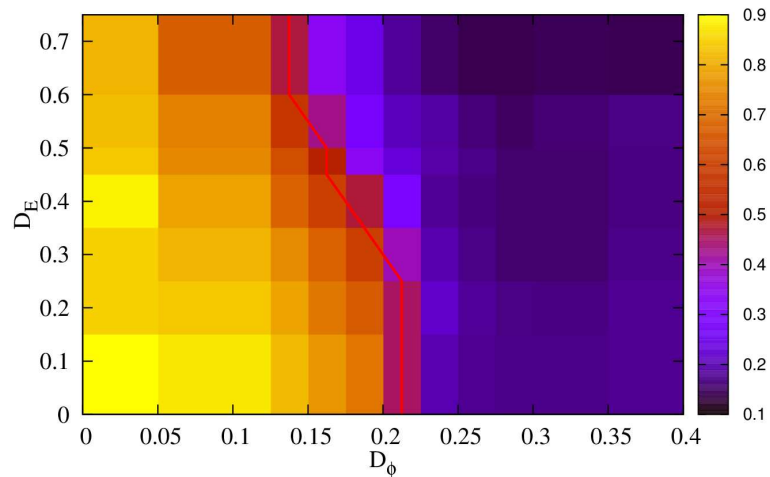


Рис. 14. Наивероятнейшая скорость на плоскости параметров D_E , D_ϕ . Видно, что чем выше аддитивный шум, тем меньшая интенсивность мультипликативного шума требуется для перехода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что поведение систем из $10 < N < 300$ частиц соответствует поведению более крупных ансамблей, по крайней мере при глобальном взаимодействии. При этом, с увеличением интенсивности активного (мультипликативного) углового шума наблюдается переход от упорядоченного состояния к неупорядоченному. Так, в статье [2] в рамках гидродинамического подхода, справедливого в пределе бесконечно большого ансамбля, было доказано существование в данной системе области бистабильности. Численные исследования показали, что и в малых ансамблях такая область существует; однако значение параметра связи между частицами μ , при которых система становится бистабильной, тем больше, чем меньше частиц в ансамбле. Кроме того, реализация бистабильности в ансамбле из ограниченного числа частиц возможно только в отсутствие пассивного (аддитивного) шума.

Определена взаимосвязь поведения ансамбля с вероятностным распределением компонент средней скорости и скорости одной частицы. В области бистабильности при разных начальных условиях возможно установление двух стационарных состояний с разными вероятностными распределениями скорости частиц. Границы области бистабильности связаны с жесткими стохастическими бифуркациями, состоящими в исчезновении одного состояния и возникновении другого. В присутствии

аддитивного шума явление бистабильности сменяется явлением бимодальности, состоящим в существовании двух значений абсолютной величины скорости частицы, характеризующихся максимальной плотностью вероятности. Можно выделить область бимодальности, границы которой соответствуют мягким стохастическим бифуркациям, идентифицируемым по возникновению (исчезновению) «лишних» экстремумов распределения.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 14-52-12002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romanczuk P., Bar M., Ebeling W., Lindner B., Schimansky-Geier L. Active Brownian particles: From individual to collective stochastic dynamics. *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2012.
2. Großmann R., Schimansky-Geier L., Romanczuk P. Active Brownian particles and active fluctuations with velocity-alignment. *New Journal of Physics*. 2012.
3. Schweitzer F., Ebeling W., Tilch B. Complex motion of Brownian particles with energy depots. *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 5044–5047.
4. Ebeling W., Schweitzer F., Tilch B. Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility. *Biosystems*. 1999. V. 49. P. 17–29.
5. Erdman U., Ebeling W., Schimansky-Geier L., Schweitzer F. Brownian particles far from equilibrium. *Eur. Phys. J. B*. 2000. V. B15. P. 105–113.
6. Ebeling W., Schimansky-Geier L., Romanovsky Yu. *Stochastic Dynamics of Reacting Biomolecules*. Singapore: World Scientific, 2002.
7. Schweitzer F. *Brownian Agents and Active Particles. Collective Dynamics in the Natural and Social Sciences*. Berlin: Springer, 2003.
8. Chetverikov A., Ebeling W., Velarde M.G. Thermodynamic and phase transitions in dissipative and active Morse chain. *Eur. Phys. J. B*. 2005. V. 44. P. 509–519.
9. Четвериков А.П., Эбелинг В., Веларде М.Г. Солитоны и кластеры в одномерных ансамблях взаимодействующих броуновских частиц. *Известия Саратовского университета. Серия Физика*. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 28–41.
10. Schienbein M., Gruler H. Langevin equation, Fokker–Planck equation and cell migration. *Bull. Math. Biol.* 1993. V. 55. No. 3. P. 585–608.
11. Romanczuk P., Erdmann U. Collective motion of active Brownian particles in one dimension. *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2010. V. 187. P. 127–134.
12. Romanczuk P., Schimansky-Geier L. Mean-field theory of collective motion due to velocity alignment. *Ecol. Complexity*. 2012. V. 10. P. 82–92.
13. Сергеев К.С., Вадивасова Т.Е., Четвериков А.П. Индуцированный шумом переход в малом ансамбле активных броуновских частиц. *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40. Вып. 21. С. 88–96.
14. Arnold L. *Random Dynamical Systems*. Berlin: Springer, 2003.
15. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1978. Т. 18. № 1. С. 107.

Материал поступил в редакцию 22.12.2014, опубликован 16.02.2015.