

=====МАТЕРИАЛЫ ВТОРОЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ=====
=====«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОЛОГИИ»=====

УДК: 577.4 : 517.9

Исследование модели переноса тепла и влаги в системе почва-растение

©2012 Воротынцев А.В.*

Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН, Российская академия наук,
Москва, 119333, Россия

Аннотация. Для задачи сопряженного переноса тепла и влаги в растительном покрове и почве с учетом баланса энергии формулируется интегральное уравнение, позволяющее получить описание переноса в покрове в виде простых алгебраических выражений, зависящих от решения уравнения. Для хорошо вентилируемого покрова формулируется приближенная замкнутая система уравнений, описывающая перенос в почве. Из решения такой системы и найденных алгебраических выражений легко получить значения переменных переноса в покрове.

Ключевые слова: моделирование агроценозов, система почва-растение, водный режим растений, водный баланс.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование переноса тепла и влаги в системе почва-растение – одна из базовых задач описания роста растений и их урожайности. Следуя [1], перенос тепла и влаги в статье описывается 4-мя подсистемами уравнений типа диффузии, связанными нелинейными алгебраическими соотношениями балансов тепла и массы. Уравнения содержат многие трудно определяемые параметры. Поэтому представляет практический интерес получение упрощенных приближенных моделей, доступных для качественного аналитического исследования и полезных для оценки параметров переноса.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ С УЧЕТОМ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

1. Система уравнений модели переноса тепла и влаги

На рис. 1 представлена схема потоков тепла и влаги в системе почва-растение. Зигзагами изображены сопротивления, которые испытывают потоки тепла и влаги. Например, поток J_{ql} водяного пара из листьев в межлистное пространство, испытывающий сопротивление D_q^{-1} , равен $J_{ql} = D_q(q_a - \rho_l)$, где q_a и ρ_l – концентрации пара внутри и вне листьев.

В слое ($0 \leq x \leq H_l$) растительного покрова и корнеобитаемом слое почвы $-H_s \leq x \leq 0$ рассмотрим четыре сопряженные системы уравнений: две системы уравнений (1)–(4) для температуры воздуха T_a , листьев T_l , концентрации водяного пара в межлистном воздухе q_a , в устьичных полостях листьев q_l .

* avv_alexv@mail.ru

$$J_{Ta} = -c_p k_a \partial T_a / \partial x, \quad J_{qa} = -k_a \partial q_a / \partial x, \quad (0 \leq x \leq H_l); \quad (1)$$

$$c_p \partial T_a / \partial t = -\partial J_{Ta} / \partial x + f_{Tl}, \quad \partial q_a / \partial t = -\partial J_{qa} / \partial x + f_{ql}; \quad (2)$$

$$f_{Tl} = c_p D_T S_l (T_l - T_a) p_l, \quad f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l; \quad (3)$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = \partial R_{ll} / \partial x; \quad (4)$$

и две системы (5-7) для температуры T_s и водного потенциала $\psi_s < 0$ почвы:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} \partial T_s / \partial x, \quad J_{\psi_s} = -k_{\psi_s} \partial \psi_s / \partial x, \quad -H_s \leq x \leq 0; \quad (5)$$

$$c_s \partial T_s / \partial t = -\partial J_{Ts} / \partial x, \quad c_{\psi_s} \partial \psi_s / \partial t = -\partial J_{\psi_s} / \partial x - f_{\psi_s}; \quad (6)$$

$$f_{\psi_s} = J_{ql} p_k + D_k S_k (\psi_s - \bar{\psi}_s) p_k; \quad (7)$$

с краевыми условиями:

$$J_{Ta} = c_p D_a (T_a - T_a^0), \quad J_{qa} = D_a (q_a - q_a^0), \quad x = H_l; \quad (8)$$

$$J_{Ta} = c_p D_{Ts} (T_s - T_a), \quad J_{qa} = D_{qs} (q_s - q_a), \quad x = 0; \quad (9)$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0, t), \quad -J_{\psi_s} + J_{qa} = Q(t), \quad x = 0; \quad (10)$$

$$T_s = T_s^0, \quad \psi_s = \psi_s^0, \quad x = -H_s. \quad (11)$$

Транспорт воды в растениях и транспирация J_{ql} регулируется водным потенциалом листьев ψ_l , их устьичным сопротивлением r_{st} и описывается нелинейными выражениями:

$$J_{ql} = \int_0^{H_l} f_{ql} dx, \quad J_{ql} = D'_k (\bar{\psi}_s - \psi_l), \quad \bar{\psi}_s = \int_{-H_k}^0 \psi_s p_k dx; \quad (12)$$

$$r_{st} = r_{s0} (\psi_m - \delta_l \psi_l) (\psi_m - \psi_l)^{-1}, \quad \delta_l < 0, \quad \frac{1}{D_q} = \frac{1}{D_T} + r_{st}, \quad \frac{1}{D'_k} = r_{kc} + \frac{1}{D_k S_k}.$$

Здесь $J_{Ta}(x, t)$, $J_{qa}(x, t)$ – потоки тепла и пара в воздухе, $J_{Ts}(x, t)$, $J_{\psi_s}(x, t)$ – потоки тепла и воды в почве; $\bar{\psi}_s(t)$ – усредненный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы; $\psi_l(t)$ – водный потенциал листьев, $R_{ll}(x, t)$ – заданная поглощенная слоем $(0, x)$ длинноволновая и коротковолновая радиация, $R_l(t) = R_{ll}(H_l, t)$ – радиация, поглощенная покровом, $R(0, t)$ – радиационный баланс у поверхности почвы; $R_s(t) = R(0, t) + J_{Ts}(0, t)$ – энергия, поглощенная верхним слоем почвы; $S_l(t)$, $S_k(t)$ – поверхности листьев и корней на единице поверхности почвы; $S_l p_l(x, t)$, $S_k p_k(x, t)$ – плотность листовой и всасывающей корневой поверхности; $D_q(t)$ – коэффициент проводимости для пара на границе лист-воздух, зависящий от ψ_l . $T_a^0(t)$, $q_a^0(t)$, $Q(t)$ и $T_s^0(t)$, $\psi_s^0(t)$ – заданные функции времени, измеряемые на высоте H_a метеобудки над покровом и глубине $-H_s$ почвы. Остальное – заданные константы и функции: $\rho(T)$ – насыщенная влажность воздуха при температуре T ; c_p , c_s – теплоемкость воздуха и почвы; $k_a(x)$, k_{Ts} – теплопроводность воздуха и почвы; k_{ψ_s} – влагопроводность почвы, χ – теплота парообразования, D_T , D_k , D_a , D_{Ts} , D_{qs} – коэффициенты проводимости.

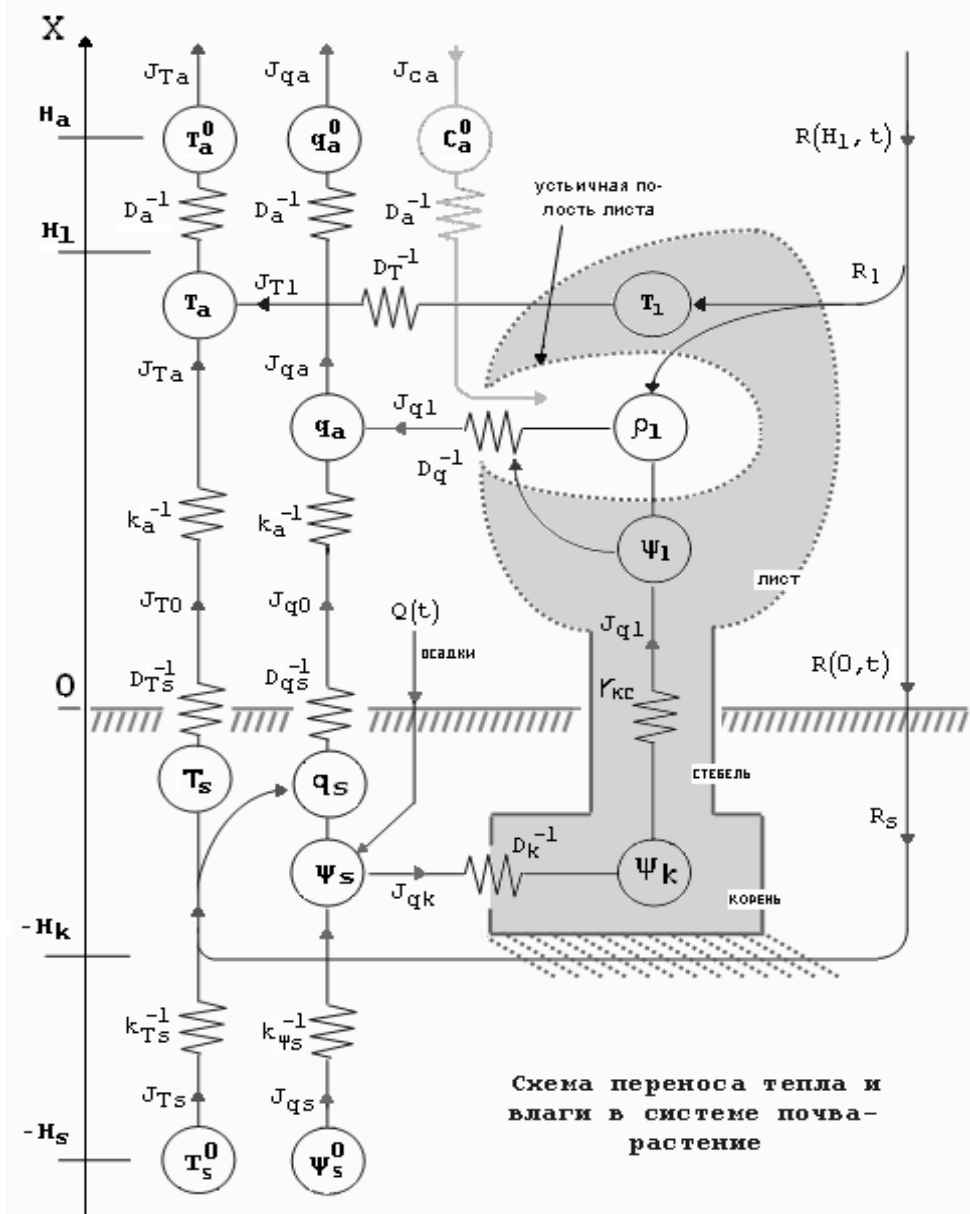


Рис. 1. Схема переноса тепла и влаги в системе почва-растение.

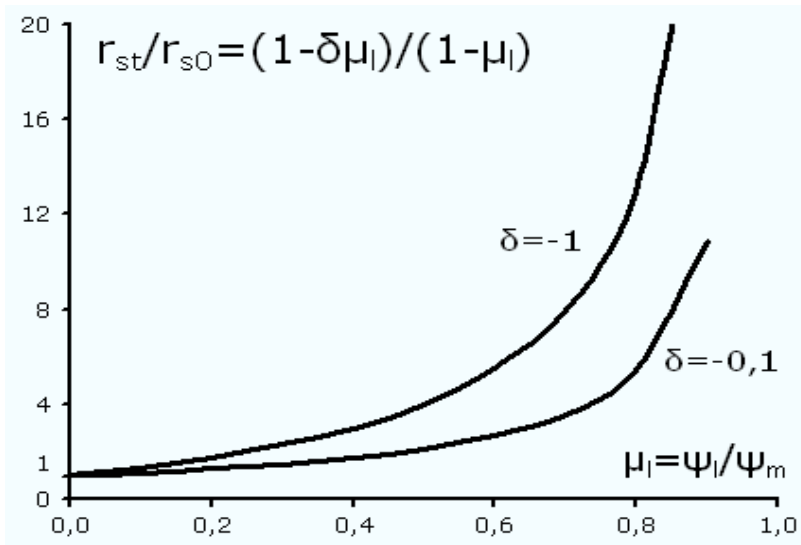


Рис. 2. Зависимость устьичного сопротивления r_{st} от приведенного потенциала μ_l листа.

Потоки являются алгебраическими величинами, имеющими знак. Направления положительных потоков указаны на рис. 1 стрелками. Уравнения (1)–(11) являются результатом применения известного уравнения переноса $\partial y/\partial t = -div J + f$, $J = -k\nabla y$ к потокам $J(x,t)$ одномерного переноса тепла и влаги концентраций $y(x,t)$, где k – коэффициенты проводимости среды, а также закона сохранения энергии в форме выражений (4), (10) и массы в форме (7), (10), [1]. Так, (4) утверждает, что сумма источников тепла для воздуха f_{Tl} и пара χf_{ql} равна энергии ΔR_{ll} радиации, поглощенной слоем $(x, x + \Delta x)$. Заметим, что (4) не является дифференциальным уравнением, ибо $R_{ll}(x,t)$ – заданная функция. Выражение (7) описывает источник пара в межлистном воздухе как испарение воды, поглощенной корнями, через устьичные щели листьев в зависимости от их водного потенциала ψ_l .

Модель (1)–(12) учитывает влияние внешних условий на величину устьичного сопротивления r_{st} , с помощью которого растение балансирует свой температурный режим T_l , тургор листьев и поглощение CO_2 , затрачиваемого на рост биомассы. Рост внутрилистного давления (тургора), растягивающего лист, способствует росту биомассы листа за счет продуктов фотосинтеза. Полагается, что величина r_{st} определяется известной зависимостью (12) от водного потенциала ψ_l листа и его потенциала завядания ψ_m , $\psi_m < \psi_l \leq 0$, приведенной рис. 2. Эта зависимость существенно нелинейна. Чем ближе ψ_l к ψ_m , тем больше сопротивление r_{st} и тем меньше вынос тепла и воды транспирацией листьев J_{ql} , тем больше T_l и больше тургор, но меньше поглощение CO_2 листьями и наоборот.

Более подробное объяснение модели приводится в [1] и [2].

2. Фундаментальная система уравнений

Обозначим:

$$d_a(x,t) = \rho(T_a) - q_a, \quad d_s(t) = \rho(T_s(0,t)) - q_s(t), \quad d_a^0 = \rho(T_a^0) - q_a^0(t); \quad (13)$$

$$\rho(T) = \rho(T_l) + \delta(T - T_l);$$

$$k(x) = \frac{k_a(x)}{1 + \delta\chi/c_p}, \quad G = \frac{1}{1 + c_p/(\delta\chi)}, \quad G_l = G(1 - b_l), \quad G_s = G(1 - b_s);$$

$$\frac{1}{D_{ak}'} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k_a(x)}, \quad \frac{1}{D_{ak}'} = \frac{\delta\chi}{c_p D_{ak}'}, \quad \frac{1}{D_{Hk}'} = \frac{1}{D_{ak}'} + \frac{1}{D_{ak}'} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)}, \quad \frac{1}{D_{Ta}'} = \frac{\delta\chi}{c_p D_a'}$$

$$\frac{1}{D_a'} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D_{Ta}'}, \quad \frac{1}{D_{Ts}'} = \frac{\delta\chi}{c_p D_{Ts}'}, \quad \frac{1}{D_T'} = \frac{\delta\chi}{c_p D_T S_l'}, \quad \frac{1}{D_q'} = \frac{1}{D_q S_l'}, \quad \frac{1}{D_l'} = \frac{1}{D_q'} + \frac{1}{D_T'}$$

$$\frac{1}{D_s'} = \frac{1}{D_{qs}'} + \frac{1}{D_{Ts}'}, \quad b_l = G^{-1} \frac{D_l'}{D_T'}, \quad b_s = G^{-1} \frac{D_s'}{D_{Ts}'}, \quad D_{\Sigma}' = D_a' + D_l' + D_s'.$$

Очевидно, $D_l' < D_T'$, $D_s' < D_{Ts}'$. Отметим, что введенные величины положительны, кроме, возможно, G_l и G_s .

Утверждение 1. Функция $y = d_a(x,t)$ в квазистационарном приближении удовлетворяет системе:

$$\partial(k \partial y / \partial x) / \partial x - D_l' p_l y + \chi^{-1} G_l \partial R_{ll} / \partial x = 0, \quad 0 \leq x \leq H_l; \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 k \partial y / \partial x + D'_a (y - d_a^0) &= 0, & x = H_l; \\
 k \partial y / \partial x - D'_s (y - d_s) + \chi^{-1} G_s R_s &= 0, & x = 0; \\
 D'_l \int_0^{H_l} y p_l dx + D'_a \{y(H_l, t) - d_a^0\} + D'_s \{y(0, t) - d_s\} &= \chi^{-1} \{G_l R_l + G_s R_s\}, & (15)
 \end{aligned}$$

включающей краевую задачу (14) и интегральное соотношение (15).

Утверждение 2. Для потоков $J_{qa}(x, t)$, $J_{Ta}(x, t)$ температур $T_a(x, t)$, $T_l(x, t)$, $T_s(x, t)$ концентрации паров воды в воздухе $q_a(x, t)$ и дефицита влажности воздуха $y = d_a(x, t)$ справедливы выражения:

$$J_{qa} = \chi^{-1} G R_a^0 + D'_a (d_a^0 - y), \quad J_{Ta} = (1 - G) R_a^0 - \chi D'_a (d_a^0 - y), \quad x = H_l; \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_{qa} = \chi^{-1} D'_l \left\{ \frac{R'_{ll}}{D'_T} + \chi p_l y \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x} J_{Ta} = D'_l \left\{ \frac{R'_{ll}}{D'_q} - \chi p_l y \right\}, \quad 0 \leq x \leq H_l; \quad (17)$$

$$J_{qa} = \chi^{-1} D'_s \left\{ \frac{R_s}{D'_{Ts}} + \chi (y - d_s) \right\}, \quad J_{Ta} = D'_s \left\{ \frac{R_s}{D'_{qs}} - \chi (y - d_s) \right\}, \quad x = 0; \quad (18)$$

$$T_a = T_a^0 + \frac{G}{\delta \chi D_a} \{F + \chi D_a (y - d_a^0)\}; \quad q_a = q_a^0 + \frac{G}{\delta \chi D_a} \{\delta F - D_a (y - d_a^0)\}, \quad x = 0;$$

$$T_l = T_a + \frac{D'_l}{\delta \chi D_T} \left\{ \frac{1}{D'_q} \frac{R'_{ll}}{p_l} - \chi y \right\}, \quad 0 \leq x \leq H_l;$$

$$T_s = T_a + \frac{D'_s}{\delta \chi D'_{Ts}} \left\{ \frac{R_s}{D_{qe}} - \chi (y - d_s) \right\}, \quad x = 0; \quad (19)$$

где $F(x, t) = R_a^0(t) + \int_x^{H_l} R_a(\xi, t) \frac{D}{k(\xi)} d\xi$, $x > 0$; $R_a(\xi, t)$ – энергия, поглощенная верхним слоем почвы и слоем $(0, \xi)$ растительного покрова.

Утверждения 1, 2 доказаны в [2]. Они сводят две сопряженные системы (1)–(4) для переменных T_a , q_a к фундаментальной системе (14) относительно одной переменной $y(x, t)$ – решению (14)–(15) и дают явные выражения относительно $y(x, t)$ для всех переменных (16)–(19) переноса.

В утверждении 1 под квазистационарностью понимается стационарное состояние системы (1)–(4) в условиях сравнительно медленно изменяющегося окружения (5)–(11). Приближение квазистационарности дает возможность пренебречь в (2) производными по времени, считая их малыми. Приближение квазистационарности представляется физически обоснованным в условиях сильного турбулентного перемешивания в воздухе растительного покрова, т.е. при больших $k(x)$, поскольку характерное время установления стационарного состояния переноса в покрове при этом оказывается существенно меньше характерных времен изменения его окружения – почвы и воздуха над покровом. Сравнение численных расчетов и данных натурных измерений в [1] показывают справедливость такого приближения с достаточной точностью. Выразить условия этого приближения в аналитической форме пока невозможно, так как система (1)–(12) недостаточно исследована.

Утверждение 3. Функция $y = d_a(x, t)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$\bar{d}_a(t) = \frac{G_l R_l + G_s R_s}{\chi D'_\Sigma} + \frac{D'_a d_a^0 + D'_s d_s}{D'_\Sigma}, \quad (20)$$

$$y = \bar{d}_a(t) + Y(x, t) - \frac{D'_{l,1}}{D'_\Sigma} \int_0^{H_l} Y(\xi, t) p_l d\xi - \frac{D'_s}{D'_\Sigma} Y(0, t), \quad (21)$$

$$Y(x, t) = D'_{l,1} \int_x^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} \int_0^\xi y(\zeta, t) p_l d\zeta + D'_s \{y(0, t) - d_s\} \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} - \chi^{-1} \int_0^{H_l} \frac{G_{l,1} R_{ll}(\xi, t) + G_s R_s}{k(\xi)} d\xi.$$

Утверждение 3 можно получить, интегрируя (14) [2].

3. Приближенная модель переноса тепла и влаги

Можно ожидать, что с ростом $k(x)$ в (21) переменная $Y(x, t)$ стремится к 0, а решение $y(x, t)$ – к $\bar{d}_a(t)$ из (20). Доказательство этого осложняется зависимостью коэффициента $D'_{l,1}$, а также D'_Σ и G_l от $y(x, t)$ и решения задачи (5)–(11) для почвы. При доказательстве будем опираться на непрерывность этой зависимости, означающую малое изменения этих параметров при малом изменении $y(x, t)$. Такое свойство модели представляется весьма обоснованным численными расчетами в [1], демонстрирующими отсутствие особенностей. Положим:

$$\beta = A \bar{D}_\Sigma / D'_{Hk}, \quad \text{где } A = 1 + (D'_T + D'_s) / (D'_a + D'_s), \quad \bar{D}_\Sigma = D'_a + D'_T + D'_s.$$

Рассмотрим последовательность $y_n(x, t)$, $n \geq 0$

$$y_{n+1}(x, t) = \bar{d}_a(t) + Y_n - \frac{D'_{l,n}}{D'_{\Sigma,n}} \int_0^{H_l} Y_n p_l d\xi - \frac{D'_s}{D'_{\Sigma,n}} Y_n(0, t), \quad y_0(x, t) = \bar{d}_a(t); \quad (22)$$

$$Y_n(x, t) = D'_{l,n} \int_x^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} \int_0^\xi y_n(\zeta, t) p_l d\zeta + D'_s \{y_n(0, t) - d_s\} \int_x^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} - \chi^{-1} \int_x^{H_l} \frac{G_{l,n} R_{ll}(\xi, t) + G_s R_s}{k(\xi)} d\xi.$$

Здесь через $D'_{l,n}$, $D'_{\Sigma,n}$, $G_{l,n}$ обозначены коэффициенты D'_l , D'_Σ , G_l в (21), зависящие от $y_n(x, t)$ и решения почвенной подсистемы (5)–(7) при верхних краевых условиях, определяемых для $y_n(x, t)$ с помощью (18) и (19).

Утверждение 4. Последовательность функций $y_n(x, t)$ из (22) при $\beta < 1$ равномерно сходится к решению $y(x, t)$ уравнения (21), при этом справедлива оценка:

$$\|y(x, t) - \bar{d}_a(t)\| \leq 2\beta(1 - \beta)^{-1} \bar{d}_a. \quad (23)$$

Доказательство. Обозначим $\delta_n = y_{n+1} - y_n$, $\Delta_n = Y_{n+1} - Y_n$. Тогда

$$\|\Delta_n\| \leq \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} \int_0^{H_l} |D'_{l,n+1} y_{n+1} - D'_n y_n| p_l d\xi + D'_s \|\delta_n\| \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} \leq \frac{\bar{D}_\Sigma}{D'_{Hk}} \|\delta_n\|,$$

$$\|\delta_{n+1}\| \leq \|\Delta_n\| + \int_0^{H_l} \left| \frac{D'_{l,n+1}}{D'_{\Sigma,n+1}} Y_{n+1} - \frac{D'_{l,n}}{D'_{\Sigma,n}} Y_n \right| p_l d\xi + \frac{D'_s}{D'_a + D'_s} \|\Delta_n\| \leq A \|\Delta_n\| \leq \beta \|\delta_n\| \leq \beta^{n+1} \|\delta_0\|.$$

Здесь использовано $0 < D'_{l,n} < D'_T$, $D'_a + D'_s < D'_{\Sigma,n}$, $D'_T + D'_s < \bar{D}_\Sigma$. Оценкой 3-го члена в $\|\Delta_n\|$ пренебрегаем [2]. Очевидно,

$$\|y_n - \bar{d}_a\| = \|y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + \dots + y_1 - \bar{d}_a\| \leq (\beta^{n-1} + \beta^{n-2} + \dots + 1)\|\delta_0\| = \frac{1-\beta^n}{1-\beta}\|\delta_0\| .$$

Таким образом, последовательность $y(x, t)$ при $\beta < 1$ оказывается сжимающейся и ограниченной и, следовательно, сходится к решению (21). Получим оценку (23). Полагая $n \rightarrow \infty$, получим $\|y - \bar{d}_a\| \leq (1-\beta)^{-1}\|\delta_0\|$. Осталось показать $\|\delta_0\| \leq 2\beta\bar{d}_a$.

$$\|Y_0\| \leq (D'_T \bar{d}_a + D'_s \|\bar{d}_a - d_s\| + (D'_a + D'_T + D'_s)) / D'_{Hk} \leq 2\bar{d}_a \bar{D}_\Sigma / D'_{Hk} ,$$

$$\|\delta_0\| \leq \|Y_0\| + \|Y_0\| D'_T / (D'_a + D'_s) + \|Y_0\| D'_s / (D'_a + D'_s) \leq A \|Y_0\| \leq 2\beta\bar{d}_a .$$

В последних неравенствах использована оценка $\|\bar{d}_a - d_s\| \approx \bar{d}_a$ и вытекающее из (20):

$$\bar{D}_\Sigma \bar{d}_a > D'_{\Sigma,0} \bar{d}_a > \chi^{-1}(G_{l,0} R_l + G_s R_s) > \chi^{-1}(G_{l,0} R_{ll} + G_s R_s) .$$

Доказательство закончено. Отметим, что последовательность (22) может использоваться для уточнения приближения $y(x, t) \approx \bar{d}_a$.

Таким образом, $\beta \approx 0$ для хорошо вентилируемого покрова при больших $k(x)$ и выражения (16)–(19) подстановкой $y = \bar{d}_a$ сводятся к сравнительно простым алгебраическим выражениям. Последние можно использовать как граничные условия на поверхности почвы для системы (5)–(7).

Граничное условие при $x = 0$ для T_s можно получить из (19), если заметить, что при $\beta \approx 0$

$$F = R_a^0(t) + \int_0^{H_l} R_a(\xi, t) \frac{D'_a}{k(\xi)} d\xi \approx R(H_l, t) + \{1 + D'_a/D'_k\} J_{T_s}(0, t) . \quad (24)$$

В выражение (20) для \bar{d}_a через D'_Σ входит величина D'_l , для которой из (12) получим:

$$\frac{1}{D'_l} = \frac{1}{GD'_T} + \frac{r_{s0}\Psi_m}{S_l} \left(\frac{1-\delta\mu_l}{1-\mu_l} \right) , \quad \mu_l = \{ \bar{\Psi}_s - J_{ql}/D'_k \} / \Psi_m , \quad (25)$$

где $0 \leq \mu_l = \psi_l / \psi_m < 1$.

Подставляя (24) в (18)–(19) получим краевую задачу для температуры почвы T_s в слое $-H_s \leq x \leq 0$:

$$c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ c_s k_{T_s} \frac{\partial T_s}{\partial x} \right\} = 0 , \quad -H_s \leq x \leq 0 ; \quad (26)$$

$$\delta\chi(T_s - T_a^0) + \left\{ \frac{G}{D_a} \left(1 + \frac{D'_a}{D'_k} \right) + \frac{1}{D_{qs} + D'_{Ts}} \right\} c_s k_{T_s} \frac{\partial T_s}{\partial x} , \quad x = 0 ;$$

$$= \frac{G}{D_a} R(H_l, t) + \frac{R(0, t)}{D_{qs} + D'_{Ts}} + \chi G \{ \bar{d}_a - d_a^0 - b_s(\bar{d}_a - d_s) \}$$

$$T_s = T_s^0 , \quad x = -H_s .$$

С помощью (16) систему (5)–(7) переформулируем в краевую задачу для переноса влаги в почве в виде:

$$c_{\psi} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_{\psi_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right\} + J_{ql} p_k = 0, \quad J_{ql} = \chi^{-1} D_l' \left\{ \frac{R_l}{D_T'} + \chi \bar{d}_a \right\}, \quad -H_s \leq x \leq 0; \quad (27)$$

$$k_{\psi_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + J_{q0} = Q(t), \quad J_{q0} = \chi^{-1} D_s' \left\{ \frac{R_s}{D_{Ts}'} + \chi (\bar{d}_a - d_s) \right\}, \quad x = 0;$$

$$\psi_s = \psi_s^0, \quad x = -H_s;$$

При этом:

$$\frac{1}{D_l'} = \frac{1}{GD_T'} + \frac{r_{s0} \psi_m}{S_l} \left\{ \frac{1 - \delta \mu_l}{1 - \mu_l} \right\}, \quad R_s = R(0, t) + J_{Ts}(0, t), \quad (28)$$

где $\mu_l = \{ \bar{\psi}_s - J_{ql} / D_k' \} / \psi_m$, $J_{Ts}(0, t) = -c_s k_{Ts} \partial T_s / \partial x |_{x=0}$, $\bar{\psi}_s = \int_{-\infty}^0 \psi_s p_k dx$.

Таким образом, задачи (26)–(28) оказываются сопряженными через J_{ql} и $J_{Ts}(0, t)$. Заметим, что сильная нелинейная зависимость $k_{\psi_s}(\psi_s)$ от ψ_s существенна при описании переноса почвенной влаги. Решение систем (26)–(28) осложняется нелинейной зависимостью D_l' от $\bar{\psi}_s$ через μ_l .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решая системы (26)–(28) для почвы тем или иным способом, с помощью этого решения и (16)–(19) получим полное описание водно-теплового режима растительного покрова в виде сравнительно простых алгебраических выражений (16)–(19). В статье не приводятся численные решения (26)–(28) из-за отсутствия достаточных надежных данных о параметрах модели, а также из соображений последующего исследования системы.

Уместно высказать замечания общего характера. В практике численных расчетов немало случаев, когда приближения «работают» лучше, чем точные выражения. Это может быть связано с невозможностью точного измерения исходных параметров, несоизмеримостью характерных времен процессов, включенных в модель, накоплением систематических ошибок при таких расчетах и т.д. Модель (1)–(12) содержит несколько трудноизмеримых параметров и данных: коэффициент турбулентного обмена $k_a(x)$, коэффициенты проводимости D_a , D_T , случайные функции $T_a^0(t)$, $q_a^0(t)$ в краевых условиях и т.д. Также в модели весьма условно описана архитектура покрова, транспорт вода в растениях и т.д. При этом модели этого типа используются для расчета медленно изменяющейся биомассы и урожайности растений, для расчета усредненных по декадам и месяцам водных балансов почвы. Таким образом, точность модели явно превышает точность измерения ее параметров и точность требуемых от нее результатов. Нетрудно также видеть, что уравнение диффузии, положенное в основу модели, механически заимствовано из другой области. Поэтому не будет неожиданным, если приближения модели, понижающие ее избыточную точность, смогут «работать» лучше, чем сама модель.

Модель допускает дальнейшие приближения, в частности получение приближений для (16)–(19) и получение формулы Пенмана-Монтейта, см. [1], для испарения растительного покрова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полуэктов Р.А. *Динамические модели агроэкосистем*. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 312 с.

2. Воротынцев А.В. *Исследование модели водно-теплового режима системы почва-растение-приземный слой воздуха*: препринт Вычислительного центра РАН. М.: Вычислительный центр РАН, 1991. 53 с.

Материал поступил в редакцию 25.11.2011, опубликован 20.01.2012.