

УДК: 539.311

Моделирование напряженно-деформированного состояния грыжи

А.А. Кузин^{*1}, Р.А. Кузин^{**1}, А.Г. Хакимов^{***2}

¹ Городская клиническая больница № 21, Министерство здравоохранения Республики Башкортостан, Уфа, 450071, Россия

² Институт механики Уфимского научного центра Российской академии наук, Уфа, Республика Башкортостан, 450054, Россия

Аннотация. Моделируется напряженно-деформированное состояние мягкой оболочки. Показано, что критический радиус для сферической оболочки в 1.5 раза больше радиуса недеформированной оболочки. При достижении критического давления дальнейший рост радиуса оболочки происходит при уменьшении давления. Упрочнение ослабленных участков стенки живота сухожилием широчайшей мышцы спины во время операции позволяет резко уменьшить прогиб и увеличить критическое внутриполостное давление до приемлемых значений.

Ключевые слова: моделирование, напряженно-деформированное состояние, мягкая оболочка

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы этиологии наружных брюшных грыж и в настоящее время не утратили своей актуальности. Причины, ведущие к образованию грыжи, можно подразделить на две группы: местные и общие. Последние, в свою очередь, делятся на предрасполагающие и производящие. К предрасполагающим факторам относятся наследственность, телосложение, возраст, пол, состояние и статус мышц. К производящим относятся повышение внутрибрюшного давления и ослабление брюшной стенки. Повышение внутрибрюшного давления является следствием как патологических, так и физиологических процессов в организме.

К местным факторам относятся анатомические особенности строения передней брюшной стенки, которые имеют «слабые», неприкрытые мышцами места — паховая область, пупочное кольцо, белая линия живота и бедренное кольцо. В этих местах при неблагоприятных условиях и могут развиваться выпячивания брюшины с последующим образованием грыжи.

Задача настоящего исследования состоит в том, чтобы разработать математическую модель образования грыжи и, основываясь на ней, получить рекомендации для профилактики и лечения грыжи.

Имеющуюся в литературе [1–5] информацию по данной проблеме можно подразделить на две группы. К первой группе относятся информация по физико-механическим свойствам мягких тканей человека или животных и методы определения таких показателей, как плотность, прочность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона мягких тканей и сухожилий. Ко второй группе следует отнести информацию по математическому моделированию подобных биомеханических систем.

* gkb21@ufamail.ru

** biomech2004@mail.ru

*** hakimov@anrb.ru

При моделировании механизма образования грыжи передне-боковая стенка живота рассматривалась нами как четырехслойная мягкая оболочка. Первый слой — кожа — принимался толщиной 2–3 мм, второй — подкожная жировая клетчатка — толщиной 2–20 мм, третий слой — мышцы и сухожилия — толщиной 2–5 мм, и четвертый слой — брюшина — толщиной 0.2–0.5 мм. Несущая способность передне-боковой стенки живота складывается из несущих способностей её отдельных слоев в следующих долях: первый слой — 20%, второй слой — 3%, третий слой — 70% и четвертый слой — 7%. Данные по толщинам слоев являются приблизительными. Даже у одного человека эти толщины будут разными в зависимости от области передне-боковой стенки живота, которая рассматривается или моделируется.

РАВНОВЕСИЕ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ДЕФОРМИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматриваются формы равновесия наружной грыжи и усилия, возникающие в стенке живота.

Пусть грыжа в деформированном состоянии имеет форму шарового сегмента, и она моделируется сферической оболочкой радиуса R , толщиной h , диаметром основания D .

Для исследования формы мягкой оболочки предполагается, что материал оболочки изотропный, толщина оболочки постоянна. Модуль упругости материала равен E , коэффициент Пуассона μ .

Напряжения σ в сферической оболочке, подверженной внутреннему избыточному давлению P , определяются по формуле

$$\sigma = \frac{PR}{2h}. \quad (1)$$

В сильно растяжимом материале рост напряжения сопровождается удлинением материала ткани в направлении действующих усилий (в касательной к сфере плоскости), а также утончением оболочки.

Для сферического сегмента при однородной деформации имеет место следующее соотношение

$$2 \pi R H h = 2 \pi R_0 H_0 h_0, \quad (2)$$

если грыжа образовалась из сферического сегмента радиуса R_0 . Здесь H — высота шарового сегмента, индекс «0» относится к параметрам недеформированного состояния.

Из выражения (2) следует

$$h = R_0 H_0 h_0 / RH. \quad (3)$$

Подставим выражение (3) в выражение (1)

$$\sigma = \frac{P R^2 H}{2 R_0 H_0 h_0}. \quad (4)$$

В данном случае $H = kR$, $H_0 = kR_0$, где k — постоянная.

Для двухосного растяжения ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$), которое испытывает материал оболочки (нормальным напряжением пренебрегаем ввиду его малости) известно, что

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{1-\mu}, \quad (5)$$

где ε — относительное удлинение материала оболочки, ε_1 , ε_2 — относительные удлинения в направлениях главных кривизн.

Относительное удлинение поверхности оболочки равно

$$\varepsilon = R/R_0 - 1. \quad (6)$$

Поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$\sigma = \frac{E(R - R_0)}{(1 - \mu)R_0}. \quad (7)$$

Приравнявая выражения (4) и (7), найдем уравнение нелинейной связи между P и R , откуда определяется давление в оболочке P

$$P = \frac{2ER_0h_0}{1 - \mu} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{R_0}{R^3} \right). \quad (8)$$

Исследование функции $P(R)$ на максимум дает, что критические значения радиуса R_{cr} и давления P_{cr} равны

$$R_{cr} = \frac{3R_0}{2}, \quad P_{cr} = \frac{8Eh_0}{27(1 - \mu)R_0}. \quad (9)$$

На рис. 1 дается зависимость давления P и напряжений σ в оболочке от радиуса R . Из графиков видно, что при достижении критического давления дальнейший рост радиуса оболочки может происходить при пониженном давлении. Результаты (9) полностью соответствуют формулам, полученным в работе [1] для резиновых шаров.

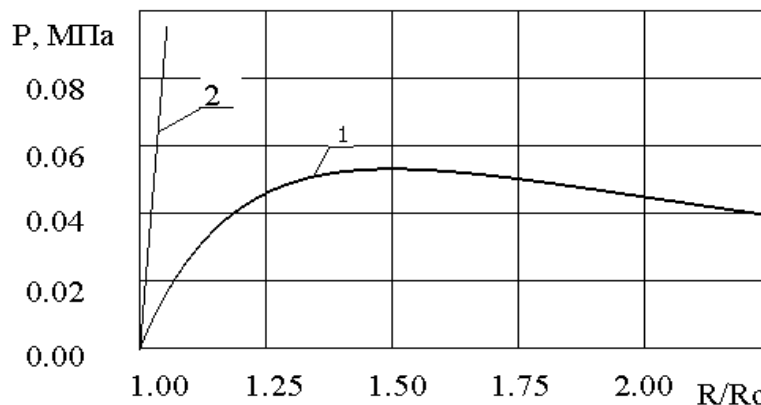


Рис. 1. Кривая 1 — зависимость давления в сферической оболочке от относительного радиуса, кривая 2 — напряжения в оболочке. $E = 0.932$ МПа, $\mu = 0.48$, $R_0 = 100$ мм, $h_0 = 10$ мм.

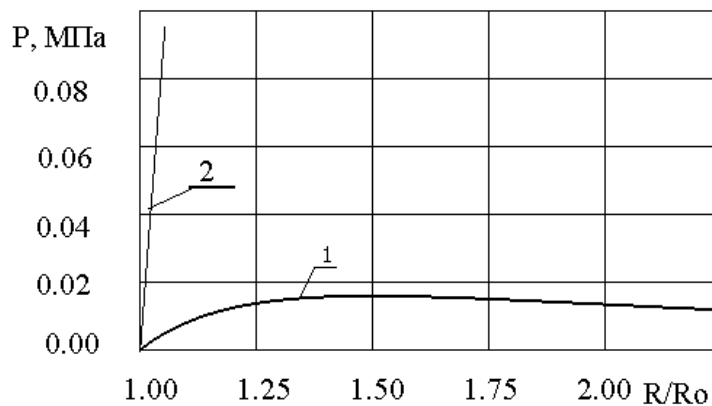


Рис. 2. Кривая 1 — зависимость давления в сферической оболочке от относительного радиуса, кривая 2 — напряжения в оболочке. $E = 0.932$ МПа, $\mu = 0.48$, $R_0 = 100$ мм, $h_0 = 3$ мм.

Из рис. 2 видно, что при уменьшении толщины оболочки происходит уменьшение критического давления до 0.015 МПа.

На рис. 3 приводятся результаты расчетов зависимости давления от радиуса оболочки для разных начальных толщин оболочки.

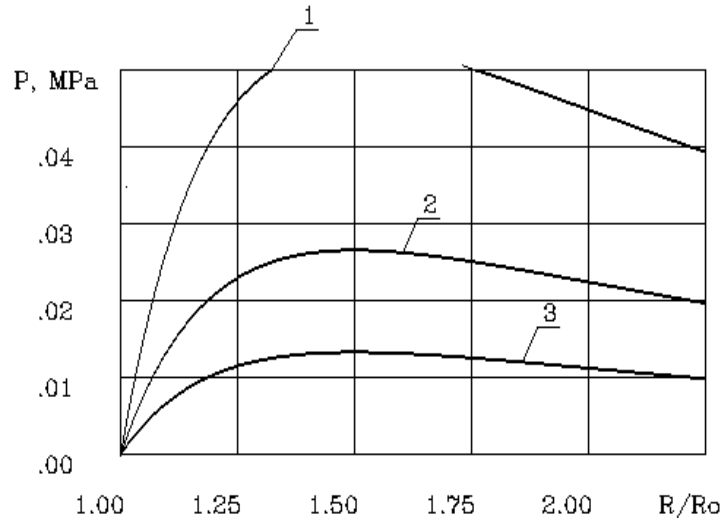


Рис. 3. Зависимости давления от радиуса оболочки для начальной толщины оболочки $h_0 = 10$ мм (кривая 1), $h_0 = 5$ мм (кривая 2), $h_0 = 2.5$ мм (кривая 3) для $R_0 = 100$ мм, $E = 0.932$ МПа, $\mu = 0.48$.

Проведенный анализ показывает, что критическое давление в оболочке пропорционально начальной толщине оболочки. Качественный результат, полученный в данном пункте, следующий: грыжи по форме могут быть разделены на докритические и закритические. При случайном увеличении давления грыжа может стать закритической, и будет происходить дальнейший рост размеров грыжи.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

При моделировании механизма образования грыжи передне-боковая стенка живота рассматривалась нами как четырехслойная мягкая оболочка. Первый слой — кожа толщиной $h_1 = 2$ мм и с модулем упругости $E_1 = 0.932$ МПа, второй — подкожная жировая клетчатка толщиной $h_2 = 5$ мм и с модулем упругости $E_2 = 0.1$ МПа, третий слой — мышцы и сухожилия толщиной $h_3 = 4$ мм и с модулем упругости $E_3 = 0.932$ МПа, и четвертый слой — брюшина толщиной $h_4 = 0.4$ мм и с модулем упругости $E_4 = 0.932$ МПа. Принято, что коэффициент Пуассона всех слоев одинаковый и равен $\mu = 0.48$. Несущая способность передне-боковой стенки живота складывается из несущих способностей её отдельных слоев в следующих долях: первый слой — 20%, второй слой — 3%, третий слой — 70% и четвертый слой — 7%.

Приведенная жесткость стенки живота Eh определяется по формуле

$$Eh = \sum_{i=1}^4 E_i h_i,$$

где E — приведенный модуль упругости стенки живота, который принимаем равным модулю упругости мышц ($E = E_3$), тогда приведенная толщина h однослойной оболочки определяется из выражения

$$h = \left(\sum_{i=1}^4 E_i h_i \right) / E.$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АЛЛОСУХОЖИЛИЯ

Для моделирования деформирования стенки живота с лоскутом аллосухожилия, материал которого представляет сухожилие широчайшей мышцы спины площадью до 120 см^2 , толщиной 2 мм, с модулем упругости $E = 65 \text{ МПа}$ [5]. Коэффициент Пуассона примем равным 0.48.

Проведем сравнение напряженно-деформированного состояния грыжи до операции и после пластики дефекта аллосухожильным биоматериалом.

На рис. 4 (кривая 1) приводится форма осесимметричной оболочки (грыжи) [4,5], которая состоит из следующих слоев: первый слой — кожа толщиной $h_1 = 2 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_1 = 0.932 \text{ МПа}$, второй — подкожная жировая клетчатка толщиной $h_2 = 5 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_2 = 0.1 \text{ МПа}$, третий слой — мышцы и сухожилия — отсутствуют, и четвертый слой — брюшина толщиной $h_4 = 0.4 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_4 = 0.932 \text{ МПа}$. Приведенный модуль упругости примем равным E_1 , а приведенная толщина стенки живота определяется по формуле

$$h = \left(\sum_{i=1}^4 E_i h_i \right) / E = (0.932 \cdot 2 + 0.1 \cdot 5 + 0.932 \cdot 0 + 0.932 \cdot 0.4) / 0.932 \approx 2.93 \text{ мм}.$$

Критическое давление в грыже равно 0.048 МПа. На рис. 4 (кривая 2) приводится форма деформированной оболочки, которая состоит из следующих слоев (после проведения операции): первый слой — кожа толщиной $h_1 = 2 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_1 = 0.932 \text{ МПа}$, второй — подкожная жировая клетчатка толщиной $h_2 = 5 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_2 = 0.1 \text{ МПа}$, третий слой — сухожилие толщиной $h_3 = 1 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_3 = 65 \text{ МПа}$ и четвертый слой — брюшина толщиной $h_4 = 0.4 \text{ мм}$ и с модулем упругости $E_4 = 0.932 \text{ МПа}$. Приведенный модуль упругости примем равным E_3 , а приведенная толщина стенки живота равна $h = 1.042 \text{ мм}$. Форма оболочки определялась при давлении 48 КПа.

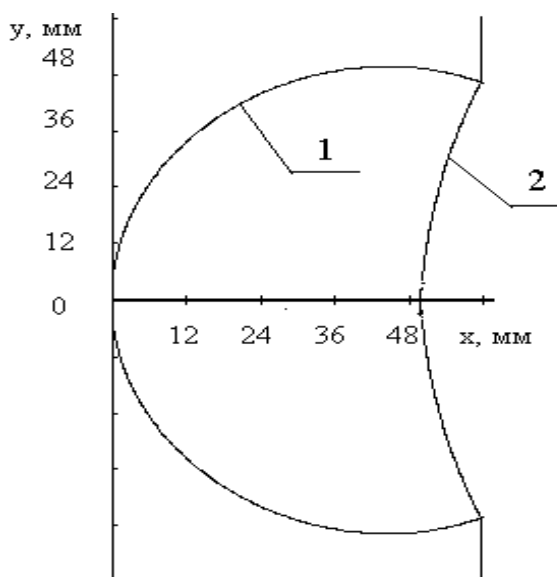


Рис. 4. Форма передней брюшной стенки при давлении $P = 48 \text{ КПа}$. 1 — до операции, 2 — после операции.

С помощью моделирования показано, что при армировании ослабленной стенки живота лоскутом аллосухожильного биоматериала происходит существенное уменьшение максимального прогиба. При этом стенка живота оказывается в докритическом положении и способна выдерживать возникающее внутреннее давление.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- а) критический радиус деформированной сферической мягкой оболочки в 1,5 раза больше радиуса недеформированной оболочки;
- б) при достижении грыжей критического размера дальнейший рост происходит и при меньшем внутриполостном давлении;
- в) разработанная методика позволяет рассчитывать критическое внутриполостное давление по известным физико-механическим свойствам стенки или слоев стенки.

Полученные результаты могут быть применены для анализа и исследования деформирования биологических систем, которые могут быть представлены мягкими оболочками.

Практические рекомендации следующие:

- а) с увеличением размера дефекта передней брюшной стенки снижается критическое внутриполостное давление, т.е. возрастает вероятность образования грыжи. Так, при размере повреждения 100 мм значение критического внутриполостного давления может находиться в пределах 19–27 КПа. Наши наблюдения свидетельствуют и результаты математического моделирования подтверждают, что применение аллосухожильного трансплантата желательнее даже при небольших грыжевых воротах. Увеличение приведенной толщины стенки приводит к возрастанию критического внутриполостного давления;
- б) в соответствии с предыдущими выводами можно рекомендовать следующие пути профилактики грыжи: бандажирование стенки живота, тренировка мышц живота с помощью специальных упражнений, совместное их применение;
- г) упрочнение ослабленных участков стенки живота сухожилием широчайшей мышцы спины во время операции позволяет резко уменьшить прогиб и увеличить критическое внутриполостное давление до приемлемых значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский В.А., Колотилов Н.Н. *Биофизические характеристики тканей человека. Справочник*. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
2. Бранков Г. *Основы биомеханики*. Москва: Мир, 1981. 256 с.
3. Ермолов В.В. В: *Сообщения лаборатории мягких оболочек*. Владивосток: ДВВИМУ ЦБНТИ ММФ, 1971. Вып. 14. С. 81–86.
4. Кузин А.А., Хакимов А.Г., Юхин Г.П. *Моделирование напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки (грыжи)*. Препринт Института механики УНЦ РАН. Уфа: Институт механики УНЦ РАН, 1998. 32 с.
5. Kuzin A. A., Khakimov A. G., Yukhin G. P. Mathematical modelling of membrane (hernia) stress-deformed condition. *Russian Journal of Biomechanics*. 2001. V. 5. № 4. P. 90–96.

Материал поступил в редакцию 2.12.2008, опубликован 29.12.2008.